

học toán cùng  
**TS. TRẦN HOÀN**  
THẦY KENKA

# HỌC GIỎI TOÁN CÙNG THẦY KENKA

**LỚP 8**



Thân chào quý phụ huynh và các con thân yêu!

Thầy Kenka rất vui vì được gửi quyển tài liệu này đến với tay các con và quý phụ huynh.

Thầy chúc cho gia đình mình nhiều sức khỏe, hạnh phúc và bình an.

Với khao khát và mong muốn giúp hàng triệu em học sinh toàn quốc học giỏi toán và yêu thích môn toán. Thầy Kenka đã mở rộng Trung Tâm Toán Tư Duy Kenka đưa vào các khóa học toán online trên website [speedmath.vn](https://speedmath.vn) để tiếp cận nhiều hơn đến các em học sinh trên mọi miền đất nước.

Bố mẹ và các con có thể trải nghiệm học thử toán online tại nhà cùng thầy Kenka tại: <https://speedmath.vn/>

**B1:** Vào website [speedmath.vn](https://speedmath.vn)

**B2:** Chọn lớp cho con.

**B3:** Bấm xem trước bài giảng để cho con học thử.

## HỌC TOÁN ONLINE CÙNG THẦY KENKA LUÔN BÊN CON NHỮNG KHI CON CẦN



QUÉT MÃ ĐỂ THAM  
GIA HỌC THỬ NGAY!





**Tiến sĩ Trần Hoan - Thầy Kenka**  
sinh năm 1983 tại Đồng Nai.

Thầy là trưởng bộ môn toán trường Đại học Lạc Hồng từ 2010, thạc sĩ Toán Giải Tích, Tiến sĩ Giáo Dục Toán Học và là người sáng lập **Trung Tâm Toán Tư Duy Kenka** cùng với hệ thống học online **speedmath.vn** với sứ mệnh giúp hàng triệu em học sinh yêu thích và phát triển tư duy về Toán.

Thầy đã công bố nhiều nghiên cứu có giá trị trong Giáo Dục Toán Học theo các hướng khác nhau đặc biệt như: Nghiên cứu dạy học Toán theo định hướng rèn luyện các kỹ năng và năng lực cho học sinh với một số công bố tiêu biểu trên các tạp Chí hàng đầu của Giáo Dục Toán Học: Tạp chí Khoa học Giáo Dục Việt Nam, Tạp chí Khoa Học Đại học sư Phạm TPHCM, tạp chí Khoa học Đại học Huế, Đại học Đà Nẵng... và một số tạp chí quốc tế có uy tín về Giáo Dục Toán Học.



Trong những năm qua, Thầy được nhiều các em học sinh và quý phụ huynh tin tưởng, yêu mến.

Thầy truyền lửa cho các em học sinh yêu thích môn toán, giúp các em từ mất gốc, sợ học toán chuyển sang yêu thích và có kiến thức, kỹ năng vững chắc.



Năm 2015 thầy thành lập trung tâm **Toán Tư Duy Kenka** giảng dạy và bồi dưỡng năng lực Toán học cho các em học sinh.



Năm 2021, hệ thống học online trên **speedmath.vn** do thầy sáng lập bao gồm các lớp toán từ lớp 2 đến lớp 12, được ra đời với mong muốn bồi dưỡng và phát triển nhiều nhân tài Toán học và có thật nhiều các em học sinh trên toàn quốc được tiếp cận và có những giờ học toán thật vui, thật thú vị. Với triết lý giảng dạy “học sinh sẽ học tập một cách hiệu quả nhất khi các em ở trong một môi trường học tập tích cực, nơi mà các em cảm thấy mình được chào đón, thoải mái và an toàn”. Chính vì vậy, thầy được rất nhiều quý phụ huynh và các học sinh yêu mến và quyết định đồng hành cùng thầy ở mỗi năm học.



học toán cùng  
**SPEEDMATH**  
THẦY KENKA

# CÁC KHOÁ HỌC CỦA THẦY KENKA

.....

**HỌC TOÁN ONLINE**  
**QUA ZOOM**



.....

**HỌC TOÁN ONLINE QUA**  
**SPEEDMATH.VN**



# LỢI ÍCH HỌC TOÁN ONLINE QUA ZOOM CÙNG THẦY KENKA

- ✓ Học trực tiếp cùng thầy Kenka - Tiến Sĩ Trần Hoan
- ✓ Trong quá trình học, thầy luôn theo sát và đồng hành cùng tất cả các em
- ✓ Sau mỗi buổi học, các em được làm thêm bài tập, thầy sẽ chấm điểm bài tập trên Azota và sửa bài cho các em ở buổi học tiếp theo, nhờ vậy thầy hiểu được khả năng học tập của từng em hơn để có thể kèm cặp và nâng đỡ các em nắm vững kiến thức
- ✓ Xoá đi tình trạng mất gốc Toán ở đa số em học sinh, giúp các em vượt qua nỗi sợ học Toán và có thêm động lực học tập
- ✓ Sau 2 tháng học sẽ có một bài thi kiểm tra, thầy sẽ chấm điểm và tổng kết tất cả điểm bài tập về nhà, bạn có kết quả thành tích học tập tốt trong quá trình học, thầy sẽ tuyên dương và gửi quà tặng đến những em có thành tích tốt và tiến bộ.
- ✓ Thầy luyện thi cho các em rất kỹ và chi tiết để khi thi và làm bài kiểm tra trên trường, các em nắm vững kiến thức và đạt hiệu quả tốt trong trường học.



# LỢI ÍCH HỌC TOÁN ONLINE TRÊN SPEEDMATH.VN CÙNG THẦY KENKA



Nắm vững cơ bản kiến thức toán, vượt qua nỗi sợ học Toán  
- Hình thành năng lực tự học, tự giải quyết vấn đề.



Các em có thể xem đi xem lại bài giảng nếu chưa thật thấu đáo (đối với hệ thống học trên speedmath.vn)



Hệ thống câu hỏi trắc nghiệm trên speedmath.vn giúp các em kiểm tra khả năng vận dụng kiến thức cơ bản của mình. Đặc biệt hệ thống sẽ chấm điểm và lưu vào học bạ, xét khen thưởng, đổi quà cho các em có thành tích xuất sắc.



Hướng dẫn thêm từ các Thầy Cô trợ giảng ngay khi các em có thắc mắc về bài học qua việc hỏi đáp trực tiếp trên hệ thống và trên Zalo. Đạt kết quả tốt trong các kỳ thi và yêu thích môn toán.



Thầy cô trợ giảng cũng thường xuyên kết nối với Quý Phụ huynh để thông tin kết quả học tập của các em, từ đó giúp các em khắc phục những khó khăn khi học môn Toán và cũng tạo được sự tin tưởng khi Phụ huynh đăng ký học Toán online cùng Thầy Kenka trên hệ thống speedmath.vn



## NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

#### 1. Bình phương một tổng.

- *Quy tắc:* Bình phương của một tổng gồm hai số bằng tổng bình phương mỗi số với 2 lần tích hai số đó.

$$a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

*Ví dụ:*  $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 = x^2 + 4x + 4 .$

#### 2. Bình phương một hiệu.

- *Quy tắc:* Bình phương của một hiệu gồm hai số bằng hiệu của tổng bình phương mỗi số với 2 lần tích hai số đó.

$$a - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

*Ví dụ:*  $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 = x^2 - 6x + 9 .$

#### 3. Hiệu hai bình phương.

- *Quy tắc:* Hiệu hai bình phương bằng tích của tổng với hiệu của hai số đó.

$$a^2 - b^2 = a + b \quad a - b = a - b \quad a + b .$$

*Ví dụ:*  $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2) .$

#### 4. Lập phương của một tổng.

$$a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

*Ví dụ:*  $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 .$

#### 5. Lập phương của một hiệu.

$$a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 .$$

*Ví dụ:*  $(x - 2)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 .$

#### 6. Tổng hai lập phương.

- *Quy tắc:* Tổng của hai lập phương bằng tích của tổng hai số với bình phương thiếu của hiệu hai số đó.

$$a^3 + b^3 = a + b \quad a^2 - ab + b^2 .$$



**Chú ý:** biểu thức  $a^2 - ab + b^2$  được gọi là bình phương thiếu của hiệu.

**Ví dụ:**  $x^3 + 2^3 = (x + 2) x^2 - 2x + 2^2 = (x + 2) x^2 - 2x + 4$  .

### 7. Hiệu hai lập phương.

- **Quy tắc:** Hiệu của hai lập phương bằng tích của hiệu hai số với bình phương thiếu của tổng hai số đó.

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2) .$$

**Chú ý:** biểu thức  $a^2 + ab + b^2$  được gọi là bình phương thiếu của tổng.

**Ví dụ:**  $x^3 - 3^3 = (x - 3) x^2 + 3x + 3^2 = (x - 3) x^2 + 3x + 9$  .

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1: Thực hiện phép tính

- **Vận dụng linh hoạt các hằng đẳng thức ở phần trọng tâm kiến thức.**

**Ví dụ 1.** Thực hiện phép tính

a)  $(x + 1)^2$ ;                      b)  $(2x - 1)^2$ ;                      c)  $(x - 3)(3 + x)$ ;                      d)  $(x^2 + 2)^2$ .

**Ví dụ 2.** Khai triển các biểu thức sau

a)  $(2x + 3y)^2$ ;                      b)  $(xy - 3)^2$ ;  
c)  $(2xy - 1)(2xy + 1)$ ;                      d)  $2\left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)(x^2 - 2y)$ .

**Ví dụ 3.** Khai triển các biểu thức sau

a)  $A = (x + y + z)^2$ ;                      ĐS:  $A = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$   
b)  $B = (a - b - c)^2$ .                      ĐS:  $B = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

**Ví dụ 4.** Thực hiện phép tính:

a)  $(x + 3)^3$ ;                      b)  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$ ;                      c)  $(x - 3y)^3$ ;                      d)  $\left(x + \frac{y^2}{3}\right)^3$ .

**Ví dụ 5.** Thực hiện phép tính

a)  $(x - 2) x^2 + 2x + 4$  ;

b)  $(2x + 1) 4x^2 - 2x + 1$  ;

c)  $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$  ;

d)  $\left(y - \frac{x}{y}\right)\left(y^2 + x + \frac{x^2}{y^2}\right)$ .

**Ví dụ 6.** Thực hiện phép tính

a)  $M = (x + 3) x^2 - 3x + 9$  ;

b)  $N = (1 - 3x) 1 + 3x + 9x^2$  ;

c)  $P = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$  ;

d)  $Q = (2x + 3y) 4x^2 - 6xy + 9y^2$  .

**Dạng 2: Viết biểu thức dưới dạng tích**

- *Sử dụng cách viết ngược lại của các hằng đẳng thức đã nêu ở phần trọng tâm kiến thức.*
- *Lưu ý:  $a \cdot a = a^2$ . Như vậy bình phương của một số cũng gọi là dạng tích của số đó.*

**Ví dụ 7.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

a)  $x^2 + 6x + 9$  ;

b)  $9x^2 - 6x + 1$  ;

c)  $x^2y^2 + xy + \frac{1}{4}$  ;

d)  $(x - y)^2 + 6(x - y) + 9$  .

**Ví dụ 8.** Điền các đơn thức vào chỗ “...” để hoàn thành các hằng đẳng thức sau

a)  $x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$  ;

b)  $4x^2 - 4x + \dots = (2x - \dots)^2$  ;

c)  $9x^2 - \dots + \dots = (3x - 2y)^2$  ;

d)  $(x - \dots)\left(\dots + \frac{y}{3}\right) = \dots - \frac{y^2}{9}$  .

**Ví dụ 9.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

a)  $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$  ;

b)  $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$  ;

c)  $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3$  ;

d)  $(x - y)^3 + (x - y)^2 + \frac{1}{3}(x - y) + \frac{1}{27}$  .

**Ví dụ 10.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

- a)  $x^3 + 27$ ;      b)  $x^3 - \frac{1}{8}$ ;      c)  $8x^3 + y^3$ ;      d)  $8x^3 - 27y^3$ .

**Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức**

- **Bước 1: Rút gọn biểu thức (nếu cần).**
- **Bước 2: Thay giá trị của biến vào biểu thức rồi thực hiện phép tính.**

**Ví dụ 14.** Tính giá trị biểu thức:

- a)  $A = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$  tại  $x = -28$ ;      ĐS: 27000
- b)  $B = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$  tại  $x = \frac{1}{2}$ ;      ĐS: 8
- c)  $C = (x + 2y)^3 - 6(x + 2y)^2 + 12(x + 2y) - 8$  tại  $x = 20, y = 1$ .      ĐS: 8000

**Ví dụ 15.** Tính bằng cách hợp lí:

- a) Tính  $11^3 - 1$ ;      ĐS: 1330
- b) Tính giá trị biểu thức  $x^3 - y^3$  biết  $x - y = 6$  và  $x \cdot y = 9$ .      ĐS: 378

**Ví dụ 16.** Tính giá trị biểu thức:

- a)  $M = (x + 3)x^2 - 3x + 9 - (3 - 2x)4x^2 + 6x + 9$  tại  $x = 20$ ;      ĐS: 72000
- b)  $N = (x - 2y)x^2 + 2xy + 4y^2 + 16y^3$  biết  $x + 2y = 0$ .      ĐS: 0

**Dạng 4: Tính nhanh**

- **Áp dụng các hằng đẳng thức một cách linh hoạt cho các số tự nhiên.**

**Ví dụ 17.** Tính nhanh

- a)  $101^2$ ;      b)  $75^2 - 50 \cdot 75 + 25^2$ ;      c)  $103 \cdot 97$ .

**Ví dụ 18.** Tính nhanh:

- a)  $101^3$ ;      ĐS: 1030301      b)  $98^3 + 6 \cdot 98^2 + 12 \cdot 98 + 8$ ;      ĐS: 1000000
- c)  $99^3$ ;      ĐS: 970299      d)  $13^3 - 9 \cdot 13^2 + 27 \cdot 13 - 27$ .      ĐS: 1000

**Ví dụ 19.** Tính giá trị của biểu thức  $P = 9x^2 - 12x + 4$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $x = 34$ ;

ĐS:  $P = 10000$

b)  $x = \frac{2}{3}$ ;

ĐS:  $P = 0$

c)  $x = \frac{-8}{3}$ .

ĐS:  $P = 100$

**Dạng 5: Chứng minh đẳng thức. Rút gọn biểu thức**

- **Áp dụng các hằng đẳng thức một cách linh hoạt để biến đổi về này thành về kia trong một đẳng thức.**

**Ví dụ 20.** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ ;

b)  $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ .

**Ví dụ 21.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $M = (x + 3y)^2 - (x - 3y)^2$ ;

ĐS:  $M = 12xy$

b)  $Q = (x - y)^2 - 4(x - y)(x + 2y) + 4(x + 2y)^2$ .

ĐS:  $Q = (-x - 5y)^2$

**Ví dụ 22.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = (x + 2)^3 + (x - 2)^3 - 2x x^2 + 12$  ;

b)  $B = (xy + 2)^3 - 6(xy + 2)^2 + 12(xy + 2) - 8$ .

**Ví dụ 23.** Rút gọn các biểu thức:

a)  $A = (x - 3) x^2 + 3x + 9 - x^3 + 3$  ;

b)  $B = (2x + 1) 4x^2 - 2x + 1 - 8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)$ ;

c)  $C = (x + 2y) x^2 - 2xy + 4y^2 - (2y - 3x) 4y^2 + 6xy + 9x^2$  .

**Dạng 6\*\*\*\*: Chứng minh bất đẳng thức; tìm GTLN hoặc GTNN của biểu thức**

- **Bước 1: Đưa các biểu thức về dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu.**

- **Bước 2: Đánh giá dựa vào kết quả**  $A^2 \geq 0$  và  $-A^2 \leq 0$ .
- **Bước 3: Kết luận GTLN hoặc GTNN**  
 $A \leq M$  thì biểu thức  $A$  có GTLN là  $M$ .  
 $A \geq m$  thì biểu thức  $A$  có GTNN là  $m$ .

**Ví dụ 24.** Chứng minh

- a) Biểu thức  $4x^2 - 4x + 3$  luôn dương với mọi  $x$ .
- b) Biểu thức  $y - y^2 - 1$  luôn âm với mọi  $y$ .

**Ví dụ 25.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- a)  $M = x^2 - 4x + 5$ ; ĐS:  $M_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 2$
- b)  $N = y^2 - y - 3$ ; ĐS:  $N_{\min} = \frac{-13}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$
- c)  $P = x^2 + y^2 - 4x + y + 7$ . ĐS:  $P_{\min} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

**Ví dụ 26.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = -x^2 - 6x + 1$ . ĐS:  $A_{\max} = 10 \Leftrightarrow x = -3$

### C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Khai triển biểu thức sau

- a)  $(x + 3)^2$ ;                      b)  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ ;                      c)  $(3x - y)^2$ ;
- d)  $\left(x - \frac{1}{2}x^2y\right)^2$ ;                      e)  $(2xy^2 - 1)(1 + 2xy^2)$ ;                      f)  $(x - y + 2)^2$ .

**Bài 8.** Thực hiện phép tính

- b)  $(3x - 1)^2$ ;                      c)  $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$ ;                      d)  $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2$ .

**Bài 9.** Khai triển các biểu thức sau

a)  $(2x + y)^2$ ;

b)  $(2 - xy)^2$ ;

c)  $(3x - 2y)(3x + 2y)$ ;

d)  $2\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)(2x^2 - y)$ .

**Bài 2.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

a)  $x^2 + 8x + 16$ ;

b)  $9x^2 - 24x + 16$ ;

c)  $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ ;

d)  $4x^2y^4 - 4xy^3 + y^2$ ;

e)  $(x - 2y)^2 - 4(x - 2y) + 4$ ;

f)  $(x + 3y)^2 - 12xy$ .

**Bài 1.** Tính:

a)  $(x - 2)^3$ ;

b)  $(2x - 3y)^3$ ;

c)  $\left(x + \frac{y}{x}\right)^3$ ;

d)  $2x^2 + 3y^3$ .

**Bài 2.** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a)  $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ ;

b)  $-\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ ;

c)  $x^6 - \frac{3}{2}x^4y + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{8}y^3$ .

**Bài 3.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ;

b)  $B = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8}$ ;

c)  $C = (2x + y)^3 - 6(2x + y)^2 \cdot x + 12(2x + y)x^2 - 8x^3$ .

**Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

a)  $M = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$  tại  $x = 25,5$ ;

ĐS: 125000

b)  $N = 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$  tại  $x = -27$ ;

ĐS: 1000

c)  $Q = \frac{x^3}{y^3} + 6\frac{x^2}{y^2} + 12\frac{x}{y} + 8$  tại  $x = 36, y = 2$ .

ĐS: 8000

**Bài 5.** Tính nhanh:

- a)  $51^3$ ; ĐS: 132651  
 b)  $89^3 + 33 \cdot 89^2 + 3 \cdot 121 \cdot 89 + 11^3$ ; ĐS: 1000000  
 c)  $23^3 - 9 \cdot 23^2 + 27 \cdot 23 - 27$ . ĐS: 8000

**Bài 1.** Đơn giản biểu thức:

- a)  $(x - 3)x^2 + 3x + 9$ ; b)  $(3x - 1)9x^2 + 3x + 1$ ;  
 c)  $\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$ ; d)  $\left(\frac{x}{3} - y\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{3} + y^2\right)$ .

**Bài 3.** Tính nhanh

- a)  $103^2$ ; ĐS: 10609    b)  $96^2 + 8 \cdot 96 + 4^2$ ; ĐS: 10000  
 c)  $99 \cdot 101$ . ĐS: 9999

**Bài 4.** Rút gọn biểu thức

- a)  $A = (2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$ ; ĐS:  $A = -24x$   
 b)  $B = (x + 1)^2 - 2(2x - 1)(1 + x) + 4x^2 - 4x + 1$ . ĐS:  $B = (-x + 2)^2$

**Bài 1.** Tính:

- a)  $(4x + 7)^2$ ; b)  $\left(6x - \frac{1}{3}y\right)^2$ ; c)  $3x^2 - 5xy^3 - 3x^2 + 5xy^3$ .

**Bài 2.** Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu.

- a)  $x^2 - 6xy + 9y^2$ ; b)  $4x^2 + 4x + 1$ .

**Bài 5.** Tính giá trị của biểu thức

- a)  $N = x^2 - 10x + 25$  tại  $x = 55$ ; ĐS:  $N = 2500$   
 b)  $P = \frac{x^4}{4} - x^2y + y^2$  tại  $x = 4; y = \frac{1}{2}$ . ĐS:  $P = \frac{225}{9}$

**Bài 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a)  $A = x^2 - 4x + 6;$

ĐS:  $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2$

b)  $B = y^2 - y + 1;$

ĐS:  $B_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c)  $C = x^2 - 4x + y^2 - y + 5.$

ĐS:  $C_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

**Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a)  $A = -x^2 + 4x + 2;$

ĐS:  $A_{\max} = 6 \Leftrightarrow x = 2$

b)  $B = x - x^2 + 2.$

ĐS:  $B_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

**Bài 10.** Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu

a)  $x^2 + 4x + 4;$

b)  $4x^2 - 4x + 1;$

c)  $x^2 - x + \frac{1}{4};$

d)  $4(x + y)^2 - 4(x + y) + 1.$

**Bài 11.** Hoàn thiện các hằng đẳng thức sau

a)  $\dots - 10x + 25 = (x - \dots)^2;$

b)  $\dots - 4x^2 + x^4 = (\dots - x^2)^2;$

c)  $x^2 - \dots + 9y^2 = (x - \dots)^2;$

d)  $(2x + \dots)(\dots - y^2) = 4x^2 - y^4.$

**Bài 12.** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $(a^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2.$

b)  $(x - y)^2 + (x + y)^2 + 2(x^2 - y^2) = 4x^2.$

**Bài 13.** Rút gọn các biểu thức

a)  $A = (2x + y)^2 - (2x - y)^2;$

ĐS:  $M = 8xy$

b)  $B = (x - 2y)^2 - 4(x - 2y)y + 4y^2.$

ĐS:  $Q = x^2 - 8xy + 16y^2$

**Bài 14.** Khai triển các biểu thức sau

a)  $C = (x + y - z)^2;$

ĐS:  $C = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$



b)  $D = (a + 1 - b)^2$ .

ĐS:  $D = a^2 + 1 + b^2 + 2a - 2ab - 2b$

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức:

a)  $(7x + 4)^2 - (7x + 4)(7x - 4)$ ;

b)  $(x + 2y)^2 - 6xy(x + 2y)$ .

**Bài 17.** Tính: a)  $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$ ;

b)  $(7x - 5y)^2$ ;

c)  $6x^2 + y^2 - y^2 - 6x^2$  ;

d)  $(x + 2y)^2$ ;

e)  $(x - 3y)(x + 3y)$ ; f)  $(5 - x)^2$ .

**Bài 15.** Tính nhanh

a)  $501^2$ ;

b)  $88^2 + 24 \cdot 88 + 12^2$ ;

c)  $52 \cdot 48$ .

**Bài 16.** Tính giá trị của biểu thức  $Q = 9x^2 + 6x + 1$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $x = 33$ ;

ĐS:  $Q = 10000$

b)  $x = \frac{-1}{3}$ ;

ĐS:  $Q = 0$

c)  $x = \frac{-11}{3}$ .

ĐS:  $Q = 100$

**Bài 18.** Thực hiện phép tính

a)  $(x - 1)^2$ ;

b)  $(3 - y)^2$ ;

c)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ .

**Bài 19.** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu

a)  $x^2 - 10x + 25$ ;

b)  $49 + x^2 + 14x$ ;

c)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$ .

**Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

a)  $P = (2x - 1) 4x^2 + 2x + 1 + (x + 1) x^2 - x + 1$  ;

b)  $Q = (x - y) x^2 + xy + y^2 - (x + y) x^2 - xy + y^2 + 2y^3$ .

**Bài 3.** Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của  $x$

a)  $A = 6(x + 2) x^2 - 2x + 4 - 6x^3 - 2$  ;

b)  $B = 2(3x + 1) 9x^2 - 3x + 1 - 54x^3$ .

**Bài 4.** Tính giá trị biểu thức:

a)  $A = (x + y)^3 + x^3$  biết  $2x + y = 0$ ;

ĐS: 0

b)  $B = x^3 - y^3 - 3xy$  biết  $x - y = 1$ .

ĐS: 1

**Bài 5.** Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a)  $x^3 + 1$ ;                      b)  $x^3 - \frac{1}{27}$ ;                      c)  $x^3 - 27y^3$ ;                      d)  $27x^3 + 8y^3$ .

**Bài 6.** Rút gọn các biểu thức:

a)  $A = (x + 2) x^2 - 2x + 4 - x^3 + 2$  ;

b)  $B = (x - 1) x^2 + x + 1 - (x + 1) x^2 - x + 1$  ;

c)  $C = (2x - y) 4x^2 + 2xy + y^2 + (y - 3x) y^2 + 3xy + 9x^2$  .

**Bài 8.**

a) Chứng minh  $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$  và  $A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$

b) Áp dụng để tính  $101^3 - 1$ .

ĐS: 1030300

c) Tính giá trị biểu thức  $x^3 + y^3$  biết  $x + y = 2$  và  $x \cdot y = -3$ .

ĐS: 26

**Bài 9.** Tính giá trị biểu thức:

a)  $P = (x + 4) x^2 - 4x + 16 - 64 - x^3$  tại  $x = 100$ ;

ĐS: 2000000

b)  $Q = (2x - y) 4x^2 + 2xy + y^2 + 2y^3$  biết  $2x + y = 0$ .

ĐS: 0

**Bài 1.** Tính: a)  $2x^2 + 5y^3$  ;

b)  $3x^3 - 4xy^3$  ;

$$c) \left(6x + \frac{1}{2}\right) \left(36x^2 - 3x + \frac{1}{4}\right); \quad d) x - 5y^2 \quad x^2 + 5xy^2 + 25y^4 .$$

**Bài 8.** Tính: a)  $(5x + 1)^3$ ;

b)  $(x - 2y)^3$ ;

c)  $(4x + 5) 16x^2 - 20x + 25$  ;

d)  $\left(6x - \frac{1}{3}\right) \left(36x^2 + 2x + \frac{1}{9}\right)$ .

**Bài 2.** Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương hay lập phương của một tổng hoặc hiệu.

a)  $25x^2 - 5xy + \frac{1}{4}y^2$ ;

b)  $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ .

**Bài 3.** Điền các đơn thức thích hợp vào ô trống

a)  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - \square + \frac{1}{x^2}$ ;

b)  $\left(\frac{1}{2}x + \square\right) \left(\frac{1}{4}x^2 - \square + \frac{1}{9}y^2\right) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{27}y^3$ .

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức:  $(3x + y) 9x^2 - 3xy + y^2 - (3x - y)^3 - 27x^2y$ .

**Bài 20.** Rút gọn biểu thức:

a)  $(x + y)^2 - (x - y)^2$ ;

b)  $2(x - y)(x + y) + (x + y)^2 + (x - y)^2$ .

**Bài.** Tính nhanh (không dùng MTBT)

a)  $98^2$ ;

b)  $63^2 - 37^2$ ;

c)  $105^2$ ;

d)  $97^2 - 9$ .

**Bài 22.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với  $x = -19$ .

$$A = (3x + 2)^2 + (2x - 7)^2 - 2(3x + 2)(2x + 5).$$

**Bài 23.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với  $x = \frac{1}{5}$ .

$$B = (3x - 1)^2 - (x + 7)^2 - 2(2x - 5)(2x + 5).$$

**Bài 4.** Cho biểu thức  $A = 5(x + 3)(x - 3) + (2x + 3)^2 + (x - 6)^2$ . Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức  $A$  với  $x = -\frac{1}{5}$ .

**Bài 5.** Cho biết  $x + y = 15$  và  $xy = -100$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = x^2 + y^2$ .

**Bài 6.** Tính nhanh giá trị của biểu thức

a)  $C = 39^2 + 78 \cdot 61 + 61^2$ ;

b)  $D = 50^2 - 49 \cdot 51$ .

**Bài 7.** Chứng minh đẳng thức  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ .

**Bài 8.** Chứng minh đẳng thức

$$3x^2 + y^2 + z^2 - (x - y)^2 - (y - z)^2 - (z - x)^2 = (x + y + z)^2.$$

**Bài 17.** Chứng tỏ

a)  $x^2 - 6x + 10 > 0$  với mọi  $x$ ;

b)  $4y - y^2 - 5 < 0$  với mọi  $y$ .

**Bài 18.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a)  $P = x^2 - 6x + 11$ ; ĐS:  $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 3$

b)  $Q = y^2 + y$ ; ĐS:  $Q_{\min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

c)  $K = x^2 + y^2 - 6x + y + 10$ . ĐS:  $K_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**Bài 19.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $B = 4x - x^2 + 5$ . ĐS:  $B_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = 2$ .

**Bài 12.** Chứng minh giá trị của biểu thức  $P = x^2 - 2x + 3$  luôn luôn dương với mọi  $x$ .

**Bài 13.** Chứng minh giá trị của biểu thức  $Q = 6x - x^2 - 10$  luôn luôn âm với mọi giá trị của  $x$ .

**Bài 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + 10x + 28$ .

**Bài 15.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $Q = 5x^2 - 10x$ .

**Bài 16.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x - x^2 - 1$ .

**Bài 24.** Chứng minh rằng  $(2n + 3)^2 - (2n - 1)^2$  chia hết cho 8 với  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 25.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a)  $A = 4x^2 - 12x + 10$ ;

b)  $B = 2x - x^2 - 2$ .

**Bài.** Cho  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ . Chứng minh rằng  $a = b = c$ .

**Bài 5.** Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$A = (3x + 2) \cdot 9x^2 - 6x + 4 - 3 \cdot 9x^3 - 2.$$

**Bài 6.** Giá trị của biểu thức sau có phụ thuộc vào giá trị của biến không?

$$B = (x + 1)^3 - (x - 1) \cdot x^2 + x + 1 - 3x(x + 1).$$

**Bài 7.** Chứng minh đẳng thức:  $a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab]$ .

**Bài.** Rút gọn các biểu thức sau:  $(x + 2)^3 + (x - 2)^3 + x^3 - 3x(x + 2)(x - 2)$ .

**Bài.** Chứng minh đẳng thức  $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y \cdot 3x^2 + y^2$ .

**Bài.** Cho  $x - y = 1$ , tính giá trị của biểu thức  $M = 2 \cdot x^3 - y^3 - 3 \cdot x^2 + y^2$ .

Chương

4

# PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

## PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### A. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1:** Tìm điều kiện xác định và giá trị của phân thức

- Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 được gọi điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.
- Để tìm giá trị phân thức ta thay giá trị của biến vào phân thức và thực hiện phép tính.

**Ví dụ 1.** Tìm điều kiện xác định của mỗi phân thức sau :

a)  $A(x) = \frac{5x - 6}{3x}$

b)  $B(x) = \frac{x}{6y}$

c)  $C(x) = \frac{5x - 1}{3(x + 1)}$

d)  $D(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$

Lời giải:

a) Phân thức xác định khi  $3x \neq 0$  hay  $x \neq 0$  .

b) Phân thức xác định khi  $6y \neq 0$  hay  $y \neq 0$  .

c) Phân thức xác định khi  $3(x+1) \neq 0$  hay  $x \neq -1$  .

d) Phân thức xác định khi  $x^2 - 4 \neq 0$  hay  $x \neq 2$  và  $x \neq -2$

**Ví dụ 2.** Tính giá trị của phân thức

a)  $A(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$  với  $x \neq 1$  tại  $x = 2$  .

b)  $B(x) = \frac{x}{x+1}$  với  $x \neq -1$  tại  $x = 1$ .

c)  $C(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$  với  $x \neq -1$  tại  $x = 2; x = -2$ .

Lời giải:

a/ Với  $x = 2$  thì giá trị của phân thức là:  $\frac{2+1}{2-1} = 3$ .

b/ Với  $x = 1$  thì giá trị của phân thức là:  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

c/ Với  $x = 2$  thì giá trị của phân thức là:  $\frac{(2)^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2+1} = \frac{4 - 6 + 2}{3} = \frac{0}{3} = 0$ .

Với  $x = -2$  thì giá trị của phân thức là:  $\frac{(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2}{(-2)+1} = \frac{4 + 6 + 2}{-1} = \frac{12}{-1} = -12$ .

**Dạng 2: Chứng minh hai phân thức bằng nhau.**

Hai phân thức  $\frac{A}{B}$  và  $\frac{C}{D}$  được gọi là bằng nhau nếu  $A \cdot D = B \cdot C$ .

**Ví dụ 3.** Cho cặp phân thức  $\frac{x^2y^3}{5}$  và  $\frac{7x^3y^4}{35xy}$  với  $xy \neq 0$ . Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

Lời giải:

Ta có:  $x^2y^3 \cdot 35xy = 35x^3 \cdot y^4$

$$5 \cdot 7x^3y^4 = 35x^3y^4$$

Suy ra:  $x^2y^3 \cdot 35xy = 5 \cdot 7x^3y^4$ .

Nên  $\frac{x^2y^3}{5} = \frac{7x^3y^4}{35xy}$ .

**Dạng 3: Rút gọn phân thức.**

Muốn rút gọn một phân thức, ta làm theo 2 bước:

- Bước 1: Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần).

- *Bước 2: Tìm nhân tử chung của tử và mẫu rồi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.*

**Ví dụ 4.** Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)}$ .

b)  $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2}$ .

c)  $\frac{2(x-y)}{y-x}$ .

Lời giải:

a/  $\frac{2(x+1)^2}{4x(x+1)} = \frac{2(x+1)}{4x} = \frac{x+1}{2x}$ .

b/  $\frac{(8-x)(-x-2)}{(x+2)^2} = \frac{-(8-x)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{-(8-x)}{x+2} = \frac{x-8}{x+2}$ .

c/  $\frac{2(x-y)}{y-x} = \frac{-2(y-x)}{y-x} = -2$ .

**Ví dụ 5.** Rút gọn các phân thức sau

a)  $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + x}$ .

b)  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2x - 2}$ .

Lời giải:

a/  $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} = \frac{(x+1)^3}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x}$

b/  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2x - 2} = \frac{(x-1)^3}{2(x-1)} = \frac{(x-1)^2}{2}$

**Dạng 4: Quy đồng mẫu nhiều phân thức.**



- Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 được gọi điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.
- Để tìm giá trị phân thức ta thay giá trị của biến vào phân thức và thực hiện phép tính.

**Ví dụ 7.** Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a)  $\frac{1}{xy^3}$  và  $\frac{2}{x^2y}$ . ĐS:  $\frac{x}{x^2y^3}; \frac{2y^2}{x^2y^3}$ .

b)  $\frac{1}{x^2 - 2x}$  và  $\frac{2}{x}$ . ĐS:  $\frac{1}{x(x-2)}; \frac{2(x-2)}{x(x-2)}$ .

c)  $\frac{x}{x^2 - 9}$  và  $\frac{x}{x - 3}$ . ĐS:  $\frac{x}{(x-3)(x+3)}; \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)}$ .

d)  $\frac{2}{x^2 - x - 6}$  và  $\frac{3}{x + 2}$ . ĐS:  $\frac{2}{(x+2)(x-3)}; \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}$ .

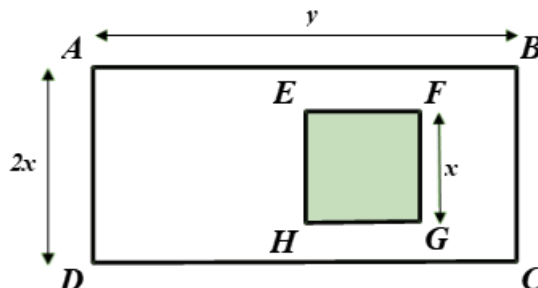
e)  $\frac{4x}{x^2 - x - 6}$  và  $\frac{1}{x^2 + 2x}$ . ĐS:  $\frac{4x^2}{x(x-3)(x+2)}; \frac{x-3}{x(x-3)(x+2)}$ .

**Dạng 5: Bài toán thực tế về phân thức đại số**

- Vận dụng các kiến thức liên quan để giải quyết bài toán thực tế.

**Ví dụ 8.**

Cho hình chữ nhật ABCD và hình vuông EFGH như hình bên dưới. (các số đo trên hình tính theo centimet).



a/ Viết phân thức biểu thị tỉ số diện tích hình vuông và diện tích hình chữ nhật ABCD.

Cho biết tử thức và mẫu thức của phân thức vừa tìm được.

b/ Tính giá trị của phân thức đó tại  $x = 2; y = 8$

Lời giải:

a/ Diện tích hình vuông EFGH là :  $x^2$  ( $cm^2$ ).

Diện tích hình chữ nhật ABCD là :  $2xy$  ( $cm^2$ ).

Phân thức biểu thị tỉ số diện tích hình vuông và diện tích hình chữ nhật ABCD là :

$$\frac{x^2}{2xy} = \frac{x}{2y} .$$

Tử thức là  $x$ ; mẫu thức là  $2y$

b/ Giá trị của phân thức đó tại  $x = 2$ ;  $y = 8$  là :

$$\frac{2}{2.8} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

### **Ví dụ 9.**

Một vườn cây có  $x^2 + 2x - y^2 - 2y$  cây, trong đó có  $x^2 - y^2$  cây lấy gỗ còn lại cây ăn quả.

a/ Viết phân thức biểu thị tỉ số cây lấy gỗ và số cây ăn quả.

b/ Tính giá trị của phân thức đã cho đó tại  $x = 100$ ;  $y = 10$ .

Lời giải:

a/ Số cây ăn quả là :  $x^2 + 2x - y^2 - 2y - x^2 + y^2 = 2x - 2y$  (cây).

Phân thức biểu thị tỉ số cây lấy gỗ và số cây ăn quả là :  $\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y}$  .

b/ Ta có :  $\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y} = \frac{(x - y)(x + y)}{2(x - y)} = \frac{x + y}{2}$  .

Giá trị của phân thức đó tại  $x = 100$ ;  $y = 10$  là :

$$\frac{100 + 10}{2} = \frac{110}{2} = 55.$$



**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**Bài 1.** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $\frac{3x + 6}{x + 2} = 3$  với  $x \neq -2$ .

b)  $\frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{x}{3}$  với  $x \neq -2$ .

c)  $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}$  với  $x \neq \pm 1$ .

d)  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 4$  với  $x \neq 1$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Cho ba phân thức bên dưới .Phân thức nào bằng nhau ?

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x(x - 1)}; \frac{x - 1}{x}; \frac{2x - 2}{2x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a)  $\frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2}{\dots}$  với  $x \neq -2$ . ĐS: 1.

b)  $\frac{x^2 + x}{2(x + 1)} = \frac{\dots}{2}$  với  $x \neq -1$ . ĐS:  $x$ .

c)  $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{\dots}$  với  $x \neq \pm 2$ . ĐS:  $x + 2$ .

d)  $\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \frac{x + 5}{\dots}$  với  $x \neq 1$ . ĐS: 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 4.** Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a)  $\frac{-2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{\dots}{x + 2}$  với  $x \neq \pm 2$ . ĐS:  $-2$ .

b)  $\frac{x^2 + 3x}{3x + 9} = \frac{\dots}{3}$  với  $x \neq -3$ . ĐS:  $x$ .

c)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$  với  $x \neq \pm 1$ .

ĐS:  $(x + 1)^2$ .

d)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{x - 2}{\dots}$  với  $x \neq 3$ .

ĐS: 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 5.** Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau

a)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$  với  $x \neq \pm 1$ .

ĐS:  $x$ .

b)  $\frac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \frac{\dots}{3}$  với  $x \neq -2$ .

ĐS:  $x$ .

c)  $\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$  với  $x \neq \pm 1$ .

ĐS: 1.

d)  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{x + 4}{\dots}$  với  $x \neq 1$ .

ĐS: 1.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 6.** Hoàn thành chuỗi đẳng thức sau:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{\dots}{x^2-4} = \frac{\dots}{x^2+x-2}, \text{ với } x \neq \pm 2; x \neq 1.$$

$$\text{ĐS: } (x+1)(x-2) \text{ và } (x+1)(x-1).$$

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 7.** Tính giá trị của phân thức

a)  $A(x) = \frac{x+2}{x-4}$  với  $x \neq 4$  tại  $x = 5$ . ĐS:  $A(5) = 7$ .

b)  $B(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  với  $x \neq -1$  tại  $2x-2=0$ . ĐS:  $B(1) = 1$ .

c)  $C(x) = \frac{x^2-5x+6}{x+1}$  với  $x \neq -1$  tại  $x^2=1$ . ĐS:  $C(1) = 1$ .

d)  $D(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$  với  $x \neq \pm 1$  tại

$|x+1|=3$ .ĐS:  $D(2) = \frac{5}{3};$

$D(-4) = -\frac{1}{15}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 8.** Tính giá trị của phân thức

a)  $A(x) = \frac{x+1}{3x+3}$  với  $x \neq -1$  tại  $x = 2$ .

ĐS:  $A(2) = \frac{1}{3}$ .

b)  $B(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  với  $x \neq 1$  tại  $3x-6=0$ .

ĐS:  $B(2) = \frac{3}{4}$ .

c)  $C(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$  với  $x \neq -1$  tại  $x^2=9$ .

ĐS:  $C(3) = 0; C(-3) = -12$ .

d)  $D(x) = \frac{-2x}{x-3}$  với  $x \neq 3$  tại  $|x|=1$ .

ĐS:  $D(1) = 1; D(-1) = -\frac{1}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 9.** Cho cặp phân thức  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$  và  $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$  với  $x \neq \pm 1$ . Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 10.** Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, chứng tỏ rằng:

a)  $\frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x}$ ;                      b)  $\frac{x + y}{3x} = \frac{3x(x + y)^2}{9x^2(x + y)}$ ;                      c)  $\frac{x + 1}{x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 6x + 9}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 11.** Chứng minh đẳng thức:  $\frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x^2+2x+4}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 12.** Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức  $A$  trong đẳng thức

$$\frac{A}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 13.** Dùng tính chất cơ bản  
thức thích hợp vào chỗ trống trong đẳng thức

của phân thức, hãy điền một đa

$$\frac{(x + 1)^2}{x^2 + x} = \frac{\dots}{x}$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 14.**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức  $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{4}$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức  $B = \frac{4 - 4x^2 + 4x}{5}$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Phân thức  
đại số

## PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ.

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

#### 1. Phép cộng các phân thức đại số .

- *Quy tắc cộng hai phân thức có cùng mẫu thức:* Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

$$\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M};$$

- *Quy tắc cộng hai phân thức không cùng mẫu thức:* Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi đưa về quy tắc cộng hai phân thức có cùng mẫu thức.
- Giống như phép cộng phân số, phép cộng phân thức cũng có các tính chất sau : giao hoán; kết hợp; cộng với số 0.

**Chú ý:** Nhờ tính chất kết hợp nên trong một dãy phép cộng nhiều phân thức, ta có thể không cần đặt dấu ngoặc.

#### 2. Phép trừ các phân thức đại số .

- *Quy tắc trừ hai phân thức có cùng mẫu thức:* Muốn trừ hai phân thức có cùng mẫu thức, ta trừ tử của phân thức bị trừ và giữ nguyên mẫu :

$$\frac{A}{M} - \frac{B}{M} = \frac{A-B}{M};$$

- *Quy tắc cộng hai phân thức không cùng mẫu thức:* Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi đưa về quy tắc trừ hai phân thức có cùng mẫu thức.

- Phân thức đối của phân thức  $\frac{A}{B}$  kí hiệu là  $-\frac{A}{B}$ . Ta có :  $\frac{A}{B} + \left(-\frac{A}{B}\right) = 0$ .

- Phân thức đối của phân thức  $\frac{A}{B}$  là  $\frac{-A}{B}$  hay  $-\frac{A}{B}$ .

- $-\left(-\frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B};$

## **B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

### **Dạng 1: Cộng , trừ các phân thức đại số thông thường**

**Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{x-4}{7} + \frac{6x+4}{7}$ . ĐS:  $x$ .

b)  $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-10}{x-2} + \frac{x+3}{x-2}$ . ĐS:  $3$ .

**Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}$ . ĐS:  $\frac{x-1}{2(x+1)}$ .

b)  $\frac{2x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{2-x}{(x+2)^2}$ . ĐS:  $1$ .

c)  $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1}$ . ĐS:  $\frac{x+1}{x-1}$ .

d)  $\frac{2(2xy-1)}{3x^2y^2} - \frac{xy-2}{3x^2y^2}$ . ĐS:  $\frac{1}{xy}$ .

e)  $\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x}$ . ĐS:  $2$ .

f)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y^2}{xy-y^2} - \frac{x^2}{x^2-xy}$ . ĐS:  $-\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}$ .

### **Dạng 2: Cộng , trừ các phân thức đại số kết hợp quy tắc đổi dấu**

- **Áp dụng quy tắc đổi dấu để tìm mẫu thức chung:**

$$\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}; \quad \frac{A}{-B} = \frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}.$$

- **Thực hiện theo quy tắc cộng, trừ hai phân thức có cùng mẫu thức.**

**Ví dụ 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1}$ . ĐS:  $x-1$ .

b)  $\frac{2}{x+1} - \frac{4}{1-x} + \frac{5x+1}{1-x^2}$ . ĐS:  $\frac{1}{x-1}$ .

**Ví dụ 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{y}{2x^2 - xy} + \frac{4x}{y^2 - 2xy}$ . ĐS:  $\frac{-2x - y}{xy}$ .

b)  $\frac{x}{x^2 + xy} + \frac{x - 3y}{y^2 - x^2} + \frac{x}{xy - x^2}$ . ĐS:  $\frac{-1}{x + y}$ .

**Dạng 3: Rút gọn phân thức và tính giá trị của biểu thức đó**

- **Bước 1: Áp dụng kiến thức đã học để rút gọn phân thức.**
- **Bước 2: Tính giá trị biểu thức sau khi đã rút gọn.**

**Ví dụ 5.** Cho biểu thức:  $P = \frac{2}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x + 1} + \frac{4x}{1 - x^3}$  với  $x \neq 0; x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ ; ĐS:  $P = \frac{2}{x(x^3 - 1)}$ .

b) Tính giá trị biểu thức  $P$  tại  $x = 2$ . ĐS:  $\frac{1}{7}$ .

**Dạng 4: Toán có nội dung thực tế**

- **Bước 1: Thiết lập các biểu thức theo yêu cầu bài toán.**
- **Bước 2: Sử dụng kiến thức đã học để giải quyết bài toán.**

**Ví dụ 6.** Một đội máy xúc nhận nhiệm vụ xúc 11600 m<sup>3</sup>. Giai đoạn đầu, đội chỉ xúc được 5000 m<sup>3</sup> với năng suất trung bình của máy xúc là  $x$  m<sup>3</sup>/ngày. Giai đoạn sau, năng suất làm việc của máy xúc tăng được 25 m<sup>3</sup>/ngày. Khi đó:

a) Hãy biểu diễn:

i) Thời gian xúc 5000 m<sup>3</sup> ở giai đoạn đầu tiên; ĐS:  $\frac{5000}{x}$  ngày

ii) Thời gian làm nốt phần việc còn lại ở giai đoạn sau; ĐS:  $\frac{6600}{x + 25}$  ngày

iii) Tổng thời gian hoàn thành công việc. ĐS:  $\frac{5000}{x} + \frac{6600}{x + 25}$  ngày.

b) Giả sử năng suất trung bình của máy xúc là  $250 \text{ m}^3/\text{ngày}$  thì tổng thời gian hoàn thành công việc là bao nhiêu ngày? ĐS: 44 ngày.

**Ví dụ 5.** Công ty da giày Hải Phòng nhận sản xuất 10000 đôi giày cho một đối tác nước ngoài với thời hạn là  $x$  ngày. Do cải tiến kỹ thuật, công ty không những hoàn thành trước kế hoạch đề ra một ngày mà còn sản xuất thêm được 200 đôi giày.

a) Hãy biểu diễn qua  $x$ :

i) Số lượng đôi giày công ty phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. ĐS:  $\frac{10000}{x}$

ii) Số lượng đôi giày thực tế công ty đã sản xuất được trong một ngày. ĐS:  $\frac{10200}{x-1}$

iii) Số lượng đôi giày làm thêm trong một ngày. ĐS:  $\frac{200x + 10000}{x(x-1)}$ .

b) Tính số lượng đôi giày mà công ty làm thêm trong một ngày với  $x = 25$ . ĐS: 25.

### C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{11x-4}{x-1} + \frac{10x+4}{2-2x}$ . ĐS: 6.

b)  $\frac{1}{x+2} + \frac{5}{2x^2+3x-2}$ . ĐS:  $\frac{2}{2x-1}$ .

c)  $\frac{-3x^2}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}$ . ĐS:  $\frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}$ .

d)  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$ . ĐS:  $\frac{8}{1-x^8}$ .

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{x+4y}{x^2-2xy} + \frac{x+y}{2y^2-xy}$ . ĐS:  $\frac{-x-2y}{xy}$ .

b)  $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$ . ĐS: 0.

**Bài 3.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{2x-4}{5} + \frac{3x+14}{5}$ . ĐS:  $x+2$ .

b)  $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{x-5} + \frac{x+2}{x-5}$ . ĐS: 3.

**Bài 4.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8}$ . ĐS:  $\frac{3}{2x}$ .

b)  $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-14}{x^2-4}$ . ĐS: 2.

**Bài 5.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-2x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$ . ĐS:  $x-3$ .

b)  $\frac{2}{x+2} + \frac{-4}{2-x} + \frac{5x+2}{4-x^2}$ . ĐS:  $\frac{1}{x-2}$ .

**Bài 6.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{y}{x^2-xy} + \frac{x}{y^2-xy}$ . ĐS:  $\frac{-x-y}{xy}$ .

b)  $\frac{1}{x^2+xy} + \frac{2}{y^2-x^2} + \frac{1}{xy-x^2}$ . ĐS:  $\frac{-2}{x(x-y)}$ .

**Bài 7.** Cho biểu thức:  $P = \frac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+1}$

a) Rút gọn biểu thức  $P$ . ĐS:  $P = \frac{x+1}{x^2+1}$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x=1$ . ĐS: 1.



**Bài 8.** Cho biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$$

với  $x \neq 0$ ;  $x \neq -1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ ;

ĐS:  $P = x + 1$ .

b) Tính giá trị biểu thức  $P$  tại  $x = 1$ .

ĐS: 2.

**Bài 9.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{3x+4}{x^3y^2} - \frac{4-x}{x^3y^2}$ .

ĐS:  $\frac{4}{x^2y^2}$ .

b)  $\frac{x^2+2}{x^3+1} - \frac{1}{x+1}$ .

ĐS:  $\frac{1}{x^2-x+1}$ .

c)  $\frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{x^2-x}$ .

ĐS:  $\frac{-4}{x}$ .

d)  $\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y-2x}{xy-x^2}$ .

ĐS:  $\frac{x-y}{xy}$ .

**Bài 10.** Tìm phân thức  $P(x)$  thỏa mãn đẳng thức sau:

a)  $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - P(x) = \frac{6x-4}{x^2-1}$ .

ĐS:  $P(x) = \frac{x-1}{x+1}$ .

b)  $\frac{2x+4}{x^3-1} - P(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}$ .

ĐS:  $\frac{-x}{x^2+x+1}$ .

**Bài 11** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{3x-2}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1}$ .

ĐS:  $\frac{x-1}{x+1}$ .

b)  $\frac{2(xy-1)}{x^2y^2} - \frac{xy-2}{x^2y^2}$ .

ĐS:  $\frac{1}{xy}$ .

c)  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}$ .

ĐS:  $\frac{x+1}{x}$ .

d)  $\frac{1}{xy-y^2} - \frac{1}{x^2-xy}$ .

ĐS:  $\frac{1}{xy}$ .

**Bài 12.** Tìm phân thức  $Q(x)$

thỏa mãn đẳng thức sau:

$$Q(x) + \frac{x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{3}{x-3}.$$

**Bài 13.**

a) Chứng tỏ rằng hiệu của phân thức dưới đây có tử bằng 1:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ .    ĐS:  $\frac{1}{x(x+1)}$ .

b) Tính nhanh biểu thức sau:  $Q(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$ .

$$\text{ĐS: } \frac{100}{x(x+100)}.$$

**Bài 14.** Đầu tháng 5 năm 2017, toàn thế giới ghi nhận hàng chục ngàn máy tính bị nhiễm một loại virus mới mang tên WannaCry. Theo ước tính, có 150000 thiết bị điện tử trở thành nạn nhân của cuộc tấn công mạng này. Trong thời gian đầu virus mới được phát tán, trung bình một ngày ghi nhận  $x$  thiết bị nhiễm virus và giai đoạn này khiến 60000 thiết bị bị thiệt hại. Sau đó tốc độ lan truyền gia tăng 500 thiết bị nhiễm virus mỗi ngày.

a) Hãy biểu diễn:

i) Thời gian 60000 thiết bị đầu tiên nhiễm virus;    ĐS:  $\frac{60000}{x}$ .

ii) Thời gian số thiết bị còn lại bị lây nhiễm;    ĐS:  $\frac{90000}{x+500}$ .

iii) Thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus.    ĐS:  $\frac{90000}{x+500} + \frac{60000}{x}$ .

b) Tính thời gian để 150000 thiết bị nêu trên bị nhiễm virus với  $x = 4000$ .    ĐS: 35.

**Bài 15.** Một tàu du lịch đi từ Hà Nội tới Việt Trì, sau đó nó nghỉ lại tại Việt Trì 2 giờ trước khi quay trở lại Hà Nội. Quãng đường từ Hà Nội tới Việt Trì là 70 km. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h. Gọi vận tốc thực của tàu là  $x$  km/h.

a) Hãy biểu diễn:

i) Thời gian tàu đi ngược dòng từ Hà Nội tới Việt Trì; ĐS:  $\frac{70}{x-5}$  (giờ)

ii) Thời gian tàu đi xuôi dòng từ Việt Trì tới Hà Nội; ĐS:  $\frac{70}{x+5}$  (giờ)

iii) Thời gian kể từ lúc tàu xuất phát đến khi tàu quay trở về Hà Nội. ĐS:  
 $\frac{70}{x-5} + \frac{70}{x+5} + 2$  (giờ).

b) Tính thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi tàu về tới Hà Nội, biết rằng vận tốc lúc ngược dòng của tàu là 20 km/h. ĐS: 7 giờ 50 phút.

**Bài 16.** Nếu mua lẻ thì giá một chiếc bút bi là  $x$  đồng. Nhưng nếu mua từ 10 bút trở lên thì giá mỗi chiếc rẻ hơn 100 đồng. Cô Dung dùng 180000 đồng để mua bút cho văn phòng. Hãy biểu diễn qua  $x$ :

a) Tổng số bút mua được khi mua lẻ. ĐS:  $\frac{180000}{x}$ .

b) Tổng số bút mua được khi mua cùng một lúc, biết rằng giá tiền một bút không quá 1200 đồng.

$$\text{ĐS: } \frac{180000}{x-100}.$$

c) Số bút được lợi khi mua cùng một lúc so với khi mua lẻ. ĐS:  $\frac{18000000}{x(x-100)}$ .

**Bài 17.** Một công ty may mặc phải sản xuất 10000 sản phẩm trong  $x$  ngày. Khi thực hiện không những đã làm xong sớm một ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm.

a) Hãy biểu diễn qua  $x$ :

i) Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch. ĐS:  $\frac{10000}{x}$ .

ii) Số lượng sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày. ĐS:  $\frac{10080}{x-1}$ .

iii) Số sản phẩm làm thêm trong một ngày. ĐS:  $\frac{80x+10000}{x(x-1)}$ .

b) Tính số sản phẩm làm thêm

trong một ngày với  $x = 25$ .

ĐS: 20.

**Bài 18.** Tính nhanh biểu thức sau:

$$Q(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 8x + 15} + \frac{1}{x^2 + 12x + 35}. \quad \text{ĐS: } Q(x) = \frac{4}{(x-1)(x+7)}.$$

Phân thức  
đại số

## PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ.

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

#### 1. Phép nhân phân thức đại số.

*Quy tắc nhân hai phân thức:*

- Muốn cộng hai phân thức ta nhân các tử thức và nhân các mẫu thức với nhau

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D};$$

**Chú ý:** Kết quả của phép nhân hai phân thức được gọi là tích. Ta thường viết tích này dưới dạng rút gọn.

\*\*\* Tính chất cơ bản của phép nhân thức:

$$\text{Giao hoán: } \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B};$$

$$\text{Kết hợp: } \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{M}{N} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{M}{N}\right);$$

$$\text{Phân phối đối với phép cộng: } \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{M}{N}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{M}{N};$$

$$\text{Nhân với số 1: } \frac{A}{B} \cdot 1 = \frac{A}{B} \cdot 1 = \frac{A}{B};$$

**Chú ý:** Nhờ tính chất kết hợp nên trong một số dãy phép tính nhân nhiều phân thức, ta có thể không cần đặt dấu ngoặc..

#### 2. Phép chia phân thức đại số.

\*\*\* Phân thức nghịch đảo:

Phân thức  $\frac{B}{A}$  được gọi là phân thức nghịch đảo của phân thức  $\frac{A}{B}$  với A, B là các đa thức khác đa thức 0.

\*\*\* Quy tắc chia hai phân thức :

Muốn chia phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$  khác 0, ta nhân  $\frac{A}{B}$  với phân thức nghịch đảo của  $\frac{C}{D}$ .

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}; \quad \frac{C}{D} \neq 0.$$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1: Thực hiện phép nhân, chia phân thức.**

**Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{6x}{15y^3} \cdot \left(-\frac{5y^2}{3x^2}\right)$  ĐS:  $-\frac{2}{3xy}$

b)  $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$  ĐS:  $\frac{x+2}{x+1}$

c)  $\frac{3-3x}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-1}$  ĐS:  $\frac{-3}{x+3}$

d)  $\frac{6x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{3x+2}$  ĐS:  $\frac{2x}{x+2}$

**Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{1-x^2}{x^2-2x} : \frac{x+1}{x}$  ĐS:  $\frac{1-x}{x-2}$

b)  $\frac{x^3-1}{x+2} : x^2+x+1$  ĐS:  $\frac{x-1}{x+2}$

c)  $\frac{x^2-1}{x^2+x-2} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$  ĐS:  $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

$$d) \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} : \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x^3 - y^3}. \quad \text{ĐS: } \frac{x - y}{x + 2y}.$$

**Dạng 2: Rút gọn biểu thức**

- Phân tích tử và mẫu thức thành nhân tử.
- Triệt tiêu các biểu thức ở trên tử và mẫu (ưu tiên tối giản phân thức ngay từ đầu).

**Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{x - 2}{x + 1} \cdot \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}. \quad \text{ĐS: } \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

$$b) \frac{2x - 4}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 2}. \quad \text{ĐS: } \frac{2(x - 1)^2}{x + 1}.$$

$$c) \frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{2x - 5}{x - 1} + \frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{6 - x}{x - 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{x - 1}.$$

$$d) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x + 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{x + 2}{x - 1}.$$

**Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x - 1}{2x + 2} \cdot \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}^2. \quad \text{ĐS: } \frac{x - 1}{x + 1}.$$

$$b) \frac{1 - x}{x^3} \cdot \left( x^2 + x + 1 - \frac{x^3}{x - 1} \right). \quad \text{ĐS: } \frac{1}{x^3}.$$

**Ví dụ 4.** Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{x^2}{(y + 1)^2} : \frac{2x}{y + 1} : \frac{2x}{y + 1}. \quad \text{ĐS: } \frac{1}{4}.$$

$$b) B = \frac{x^2}{(y + 1)^2} : \left( \frac{2x}{y + 1} : \frac{2x}{y + 1} \right). \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{(y + 1)^2}.$$

**Ví dụ 5.** Rút gọn biểu thức  $P = xy$ , biết

$$(2a^3 + 2b^3)x + b = a \quad \text{và} \quad (2a - 2b)y = 3(a + b)^2 \quad (a \neq b, a \neq -b).$$

$$\text{ĐS: } P = \frac{3(a+b)}{4(a^2 - ab + b^2)}.$$

### C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{1 - x}. \quad \text{ĐS: } -\frac{x+1}{x+2}.$$

$$\text{b) } \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1-x^3}{x^3+8}. \quad \text{ĐS: } -\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+4}.$$

$$\text{c) } \frac{x+4}{x-3} \cdot \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}. \quad \text{ĐS: } \frac{x+4}{x+1}.$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{x^2-4x} \cdot (8-2x). \quad \text{ĐS: } -2x.$$

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } \frac{x^3-1}{x^2-4} \cdot \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right). \quad \text{ĐS: } \frac{1}{x-2}.$$

$$\text{b) } \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{10-2x}{x+2} + \frac{x^3+8}{x-1} \cdot \frac{x-9}{x+2}. \quad \text{ĐS: } -(x^2-2x+4).$$

$$\text{c) } \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2}. \quad \text{ĐS: } \frac{x-1}{x+1}.$$

$$\text{d) } \frac{x-1}{2-x} \cdot \left( \frac{x^3}{1-x} + x^2 + x + 1 \right). \quad \text{ĐS: } \frac{1}{x-2}.$$

**Bài 3.** Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } x^2 - 9 : \frac{2x+6}{x-3}. \quad \text{ĐS: } \frac{(x-3)^2}{2}.$$

$$\text{b) } \frac{xy}{2x-3} : \frac{x^2y^2}{6-4x}. \quad \text{ĐS: } \frac{-2}{xy}.$$

$$\text{c) } \frac{x^2+2x}{x^2-2x+1} : \frac{x^2-4}{x^2-x}. \quad \text{ĐS: } \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$$

$$d) \frac{2x + 3y}{2 - x} : \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{x^3 - 8}.$$

$$\text{ĐS: } -\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 3y}.$$

**Bài 4.** Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{x + 4}{x + 5} : \frac{x + 5}{x + 6} : \frac{x + 6}{x + 4}.$$

$$\text{ĐS: } \left(\frac{x + 4}{x + 5}\right)^2.$$

$$b) \frac{x - 7}{x + 8} : \left(\frac{x - 7}{x - 9} : \frac{x + 8}{x - 9}\right).$$

$$\text{ĐS: } 1.$$

**Bài 5.** Tìm phân thức thỏa mãn đẳng thức sau:

$$a) \frac{x^2 + 3x}{x - 4} : P = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x}.$$

$$\text{ĐS: } P = \frac{x^2}{x - 3}.$$

$$b) Q : \frac{x - 2}{2x + 3} = \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 - 4}.$$

$$\text{ĐS: } Q = \frac{2x + 3}{x + 2}.$$

**Bài 6.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{1 - x^2}{x^2 + 2x} : \frac{2 - 2x}{3x}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{3}{2} \cdot \frac{x + 1}{x + 2}.$$

$$b) \frac{x^3 + 1}{x - 1} : x^2 - x + 1.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x + 1}{x - 1}.$$

$$c) \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x}{x - 2}.$$

$$d) \frac{x - 2y}{x^2 - xy + y^2} : \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^3 + y^3}.$$

$$\text{ĐS: } \frac{x + y}{x - 2y}.$$

**Bài 7.** Cho  $(6a + 15b)x = 3a + 3$  và  $(a^3 + 1)y = 4a^2 - 25b^2$ . Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x^2 - x}{2} \cdot \frac{2y}{x - 1}$

theo  $a$  và  $b$ .

$$\text{ĐS: } \frac{2a - 5b}{a^2 - a + 1}.$$

**Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{4x^2}{9y^4} \cdot \left(-\frac{3y^3}{2x}\right).$$

$$\text{ĐS: } -\frac{2x}{3y}.$$



b)  $\frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3}$ .      ĐS:  $\frac{x+2}{x}$ .

c)  $\frac{2x-2}{x^2-4} \cdot \frac{2-x}{x-1}$ .      ĐS:  $\frac{-2}{x+2}$ .

d)  $\frac{6x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-3x+2}{3x-2}$ .      ĐS:  $\frac{2(x-1)}{x+2}$ .

**Bài 9.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12}$ .      ĐS:  $\frac{x-2}{x+4}$ .

b)  $\frac{2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+1}{x-2}$ .      ĐS:  $-\frac{x^2-x+1}{x-1}$ .

c)  $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{5-x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{2x-6}{x+1}$ .      ĐS:  $\frac{x^2}{x+1}$ .

d)  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ .      ĐS:  $\frac{x-3}{x-1}$ .

**Bài 10.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2} \cdot \frac{x+1}{2x-2} \cdot \frac{2x^2-4}{x^2-1}^2$ .      ĐS:  $\frac{x+1}{x-1}$ .

b)  $\frac{x+1}{x^3} \cdot \left( x^2 - x + 1 - \frac{x^3}{x+1} \right)$ .      ĐS:  $\frac{1}{x^3}$ .

**Bài 11.** Rút gọn biểu thức  $P = xy$ , biết

$$(3a^3 - 3b^3)x - 4b = 4a \text{ và } (4a + 4b)y = 3(a - b)^2 \quad (a + b \neq 0, a - b \neq 0).$$

ĐS:  $P = \frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ .

**Bài 12.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = \frac{x^2}{4y^2} : \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y}$ .      ĐS:  $\frac{1}{9}$ .

b)  $B = \frac{x^2}{4y^2} : \left( \frac{3x}{2y} : \frac{3x}{2y} \right)$ . ĐS:  $\frac{x^2}{4y^2}$ .

**Câu 13.** Thực hiện phép tính

a)  $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} : \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9}$ ;      b)  $-\frac{25x^2y^5}{3x} : 15xy^2$ ;      c)  $x^2 + y^2 : \frac{x^3y + xy^3}{x^4y}$ .

**Câu 14.** Thực hiện phép tính:  $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1}$ .

**Câu 15.** Rút gọn biểu thức:  $R = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$ .

**Câu 16.** Cho  $x \neq 0$ ,  $x \neq \pm 2$ . Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left( \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) : \frac{x+14}{x^2} \quad \text{v?i } x = -3.$$

**Câu 17.** Tìm  $x$  biết

$$\frac{a+1}{a+2} \cdot x = \frac{a^2-1}{a^2+2a}, \text{ với } a \text{ là hằng số; } a \neq 1; a \neq -1; a \neq 0; a \neq -2.$$

**Câu 18.** Thực hiện phép tính

a)  $\frac{3x+9}{x^2-4} : \frac{x+3}{x-2}$ ;      b)  $\frac{5x^2+10xy}{x^2+2xy+4y^2} : \frac{x+2y}{x^3-8y^3}$ .

**Câu 19.** Thực hiện phép tính

a)  $\frac{4x^2+1}{x} : (1-2x)$ ;      b)  $(x+y) : \frac{y^2+xy}{x-y}$ .

**Bài 20.** Cho đẳng thức  $\frac{x-2y}{x^3+y^3} \cdot B = \frac{x^2-2xy}{x^2-xy+y^2}$ . Tìm biểu thức  $B$ .      ĐS:  $x(x+y)$ .

**Câu 21.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $\frac{18x^2y^2}{15z} \cdot \frac{5z^3}{9x^3y^2}$ ;      b)  $\frac{5x+5y}{4x-4y} \cdot \frac{6x-6y}{25x+25y}$ ;      c)  $3x^3y^4 \cdot \left( -\frac{7z}{9xy^5} \right)$ .

**Câu 22.** Cho  $K = \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

a) Rút gọn  $K$ .

b) Tìm số nguyên  $x$  để  $K$  nhận giá trị nguyên.

**Câu 23.** Thực hiện các phép tính sau

$$\text{a) } P = \frac{12x + 5}{x + 9} \cdot \frac{4x + 3}{360x + 150} + \frac{12x + 5}{x + 9} \cdot \frac{6 - 3x}{360x + 150};$$

$$\text{b) } P = \frac{x + 3y}{3x + y} \cdot \frac{4x - 2y}{x - y} - \frac{x + 3y}{3x + y} \cdot \frac{x - 3y}{x - y}.$$

Phân thức  
đại số

## BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG PHÂN THỨC ĐẠI SỐ .

### BÀI TẬP THỰC HÀNH

**Bài 1:** Thực hiện các phép tính sau :

$$a/ \frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{3}$$

$$b/ \frac{5x-2y}{x^2-y^2} + \frac{y-4x}{x^2-y^2}$$

$$c/ \frac{x-1}{12x} + \frac{2x+7}{12x} + \frac{6-3x}{12x}$$

$$d/ \frac{3}{x-4} - \frac{2}{4-x}$$

$$e/ \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-9}{1-x} - \frac{x-9}{1-x}$$

$$f/ \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-x}$$

**Bài 2:** Thực hiện các phép tính sau :

$$1/ \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x}$$

$$2/ \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}$$

$$3/ \frac{x-12}{6x-36} + \frac{4}{x^2-6y}$$

$$4/ \frac{6-x}{x^2+3x} + \frac{3}{2x+6}$$

$$5/ \frac{3}{2y+4} - \frac{1}{3y+6}$$

$$6/ \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}$$

$$7/ \frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$$

$$8/ \frac{x+1}{x+4} - \frac{x^2-4}{x^2-16}$$

$$9/ \frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$$

$$10/ \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$$

**Bài 3:** Thực hiện các phép tính sau :

$$a/ -\frac{11x^3}{8y^4} \cdot \frac{12y^2}{55x};$$

$$b/ \frac{48x^6}{125y^6} \cdot \left(-\frac{50y^4}{9x^3}\right)$$

$$c/ -3x^2y^2 \cdot \left(-\frac{7}{9xy^2}\right)$$

$$d/ \frac{3y}{28x^2} \cdot \frac{2x}{7y^4} \cdot 49x^4y^3$$

$$e/ \left(-\frac{20x}{3y^2}\right) : \left(-\frac{4x^3}{5y}\right)$$

$$f/ \frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4}$$

**Bài 4:**

1/ Thực hiện phép tính sau :  $a/ \frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$

b/  $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}$

2/ Thực hiện phép tính sau :

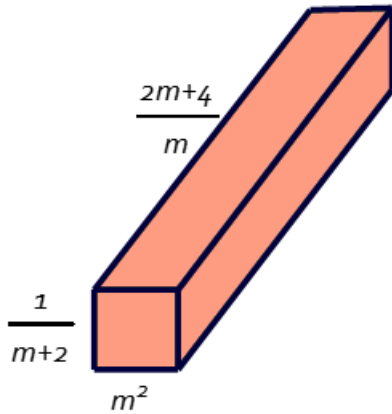
$$a/ \frac{5x-10}{x^2+7} : (2x-4)$$

$$b/ (x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7}$$

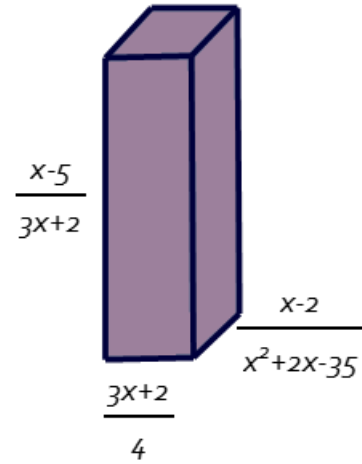
$$c/ \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5}$$

**Bài 5:**

Tính thể tích của hình hộp chữ nhật có độ dài các cạnh biểu thị bởi các phân thức sau:



Hình 1



Hình 2

**Bài 6:**

a/ Để tính tích:  $(x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x^2 + 8x + 16}$ . Bước đầu tiên bạn An viết như sau :

$$(x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x^2 + 8x + 16} = \frac{x^2 - 4}{1} \cdot \frac{1}{x^2 + 8x + 16}. \text{ Vì sao bạn viết như vậy ?}$$

b/ Hãy trình bày cách làm của bài toán trên .

**Bài 7:**

Cô giáo yêu cầu làm tính chia phân thức :  $\frac{3a}{a+2} : \frac{(a+2)^2}{a-4}$  .

Bạn Đức làm như sau :

$$\begin{aligned} \frac{3a}{a+2} : \frac{(a+2)^2}{a-4} &= \frac{3a}{a+2} : \frac{(a+2)^2}{a-4} \\ &= 3a : \frac{a+2}{a-4} \\ &= 3a \cdot \frac{a-4}{a+2} \\ &= \frac{3a(a-4)}{a+2} \end{aligned}$$



Hãy chỉ ra chỗ sai trong bài làm của Đức và giúp bạn sửa lại bài tập đó.

**Bài 8:**

Bạn Khanh thực hiện phép cộng phân thức đã viết như sau :

$$\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x+1} = \frac{5}{2x+4}$$

Em hãy cho biết bạn học sinh này đã mắc sai lầm ở chỗ nào ?

**Bài 9:**

Cô giáo cho bài toán : Thực hiện phép tính sau :  $\frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}$

*Bạn Tài thực hiện như sau:*

Ta có  $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = 0$

Vì vậy :  $\frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x}{x+1} - 0 = \frac{3x}{x+1}$



*Bạn Nam thực hiện như sau:*

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{3x - (x-1) - (x-1)}{x+1} \\ &= \frac{3x - x + 1 - x + 1}{x+1} \\ &= \frac{x+2}{x+1} \end{aligned}$$



Theo em , bạn nào thực hiện đúng ?

**Bài 10:**

Cô giáo đưa ra bài toán rút gọn phân thức sau :  $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x}$

*Bài làm của Hà :*

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} : \frac{y}{x} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{x^3}{y} \end{aligned}$$

*Bài làm của Hà :*

Ta có :

$$\frac{y}{x} : \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{yx}{xy} = 1$$

Vì vậy  $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{x}{y}$

Theo em , bạn nào đúng ?

**Bài 11:**

Cho phân thức :  $\frac{x^2 - 4}{(x-3)(x-2)}$

- a/ Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.  
 b/ Rút gọn phân thức và tính giá trị của phân thức tại  $x = 13$

**Bài 12:**

Cho phân thức :  $\frac{x^2 - 4}{(x-3)(x-2)}$

- a/ Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.  
 b/ Rút gọn phân thức và tính giá trị của phân thức tại  $x = 13$

**Bài 13:**

Cho biểu thức :  $A = \left( \frac{x}{x^2 - 36} + \frac{6-x}{6x+x^2} \right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x}$

- a/ Viết điều kiện xác định của biểu thức A.  
 b/ Rút gọn biểu thức trên.

**Bài 14:**

Cho phân thức :  $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$

- a/ Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.  
 b/ Rút gọn phân thức.  
 c/ Tìm giá trị của x để phân thức bằng 1  
 d/ Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

**Bài 15:**

Cho phân thức :  $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$

a/ Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

trị của phân thức được xác

b/ Rút gọn phân thức và tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

**Bài 16:**

Cho biểu thức :  $B = \frac{2}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x-1}{x+1}$

a/ Viết điều kiện xác định của biểu thức B.

b/ Tính giá trị của biểu thức B tại  $x = 10$ ,  $x = 20$ .

**Bài 17:**

Cho biểu thức :  $C = \left( \frac{2x+1}{x-10} - \frac{2x-1}{x+10} \right) : \frac{x+1}{x^2-100}$

a/ Viết điều kiện xác định của biểu thức C.

b/ Tính giá trị của biểu thức C tại  $x = 2023$ .

**Bài 18:**

Cho biểu thức :  $D = \frac{1}{x+4} + \frac{x}{x-4} + \frac{24-x^2}{x^2-16}$

a/ Viết điều kiện xác định của biểu thức D.

b/ Chứng minh  $D = \frac{5}{x-4}$

c/ Tính giá trị của biểu thức D tại  $x = 10$ .

d/ Tìm các số nguyên x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

**Bài 19:**

Cho biểu thức :  $E = \left( \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot \frac{x^2+4x+4}{2x}$

a/ Viết điều kiện xác định của biểu thức E.

b/ Rút gọn E

c/ Tính giá trị của biểu thức E tại  $x = 1$ .

**Bài 20:**

Một đội máy xúc trên công trường đường Hồ Chí Minh nhận nhiệm vụ xúc 11 600 m<sup>3</sup> đất. Giai đoạn đầu còn nhiều khó khăn nên máy làm việc với năng suất trung bình x (m<sup>3</sup>/ngày) và đội đào được 5000 m<sup>3</sup>. Sau đó công việc ổn định hơn năng suất của máy tăng 25 (m<sup>3</sup>/ngày).

a/ Hãy biểu diễn :



- Thời gian xúc 5000 m<sup>3</sup> đầu tiên.
- Thời gian làm nốt phần việc còn lại.
- Thời gian làm việc để hoàn thành công việc.

b/ Tính thời gian làm việc để hoàn thành công việc với  $x = 250$  (m<sup>3</sup>/ngày).

**Bài 21:**

Gia đình ông Ba đi du lịch bằng xe hơi 7 chỗ. Họ phải lái xe 100 km trên đường thường và 240 km trên đường cao tốc. Tốc độ trên đường cao tốc hơn tốc độ trên đường thường là 50%. Gọi  $r$  (km/giờ) là tốc độ trên đường thường.

a/ Hãy viết biểu thức tính thời gian mà gia đình ông Ba phải đi.

b/ Hãy tính thời gian gia đình ông Ba phải đi nếu họ lái xe đúng theo giới hạn quy định tốc độ cho phép xe ô tô dưới 30 chỗ là 40 km/giờ khi lưu thông trên đường trong khu vực đông dân cư.

**Bài 22:**

Na đi bộ 1km từ nhà của mình tới trung tâm thể thao. Sau khi chơi bóng rổ, Na đi bộ về nhà với tốc độ chia đạt 85% so với lúc đi. Gọi  $x$  là tốc độ của Na lúc đi.

a/ Hãy viết biểu thức thời gian Na đi và về.

b/ Nếu tốc độ lúc đi là 3km/giờ, thì tổng thời gian Na đi và về là bao lâu ?

**Bài 23:**

Trong một cuộc đua xe đạp, anh Nam phải hoàn thành đoạn đường 48km. Nửa đoạn đường đầu anh Nam đạp cùng một tốc độ. Nửa đoạn đường còn lại, anh Nam đạp với tốc độ nhỏ hơn lúc đầu 4km/giờ.

a/ Gọi  $x$  là tốc độ ở nửa đoạn đường đầu, hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam đi trong nửa đoạn đường đó.

b/ Hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam đi nửa đoạn đường còn lại .

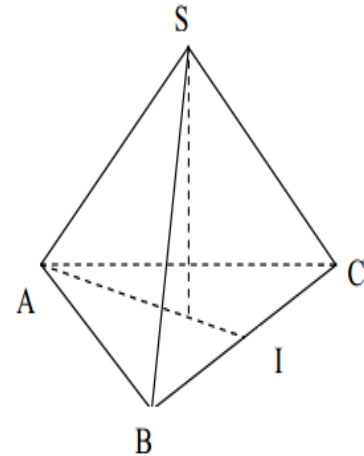
c/ Hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam hoàn thành cả đoạn đường.

## HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

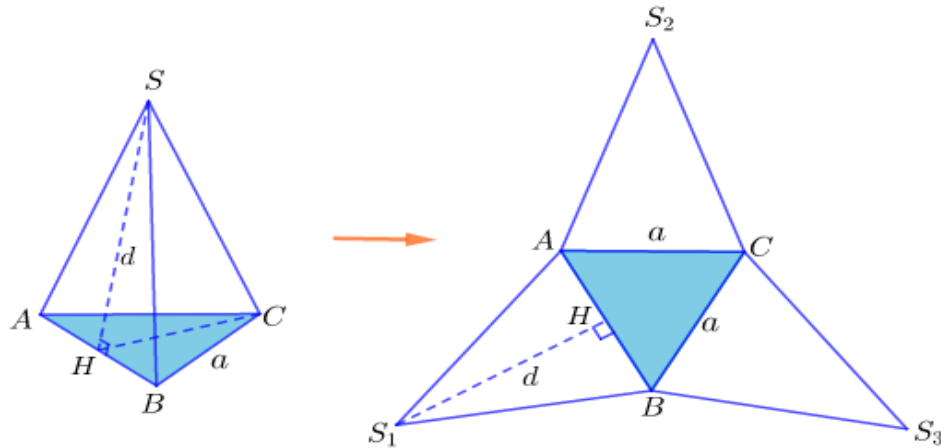
### A. KIẾN THỨC TRONG TÂM

#### 1. Hình chóp tam giác đều.

- Hình chóp tam giác đều như hình vẽ bên . Có 4 mặt , 6 cạnh.
- Hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ .
- Mặt đáy  $ABC$  là một tam giác đều.
- Các mặt bên  $SAB, SBC, SCA$  là những tam giác cân tại  $S$ .
- Các cạnh đáy  $AB, BC, CA$  bằng nhau
- Các cạnh bên  $SA, SB, SC$  bằng nhau.
- $S$  gọi là đỉnh của hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ .



#### 2. Diện tích xung quanh hình chóp tam giác đều.



- Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài trung đoạn.

- Công thức tổng quát :  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$  . Với :

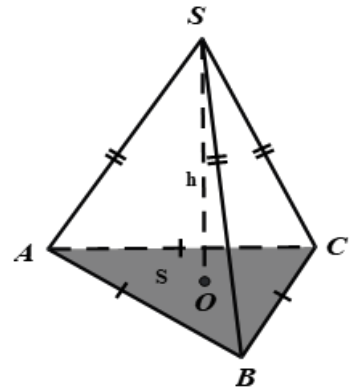
+  $S_{xq}$  : Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.

+ Chu vi đáy :  $C = 3.a$  (  $a$  là độ dài cạnh đáy tam giác đều).

+  $d$ : Độ dài trung đoạn của hình chóp tam giác đều.

### 3. Thể tích hình chóp tam giác đều.

- Thể tích của hình chóp tam giác đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao
- Công thức tổng quát :  $V = \frac{1}{3}.S.h$  . Với :
  - + V : Thể tích của hình chóp tam giác đều.
  - + S : Diện tích đáy.
  - + h : Chiều cao của hình chóp tam giác đều.

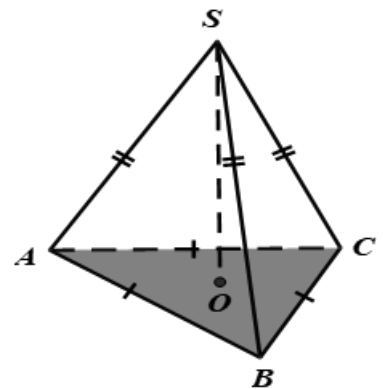


## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

**Dạng 1: Nhận biết các kiến thức cơ bản của hình chóp tam giác đều.**

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều tam giác đều  $S.ABC$  có đường cao  $SO$ . (Hình vẽ bên).

- a) Cho biết các mặt bên của hình chóp có dạng hình gì ? Nêu tên đỉnh của hình chóp.
- b) Kể tên các cạnh bên.
- c) Kể tên mặt đáy và các mặt bên của hình chóp.

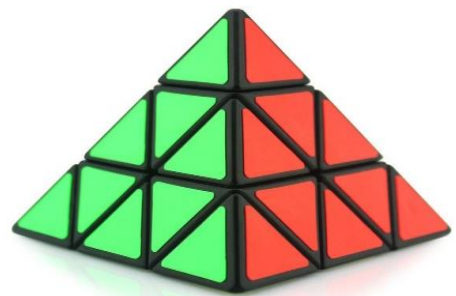


Lời giải

- a) Các mặt bên của hình chóp có dạng hình tam giác cân. Đỉnh của hình chóp là đỉnh S.
- b) Các cạnh bên:  $SA, SB, SC$ .
- d) Mặt đáy:  $ABC$ . Mặt bên:  $SAB, SBC, SAC$ .

**Ví dụ 2:** Hình ảnh bên là khối Rubik có bốn mặt , các mặt bên, mặt đáy là các tam giác đều.

- a) Khối Rubik có dạng như hình bên thường được gọi là hình gì ?
- b) Cho biết số mặt ,số cạnh ,số đỉnh của hình khối bên ?
- c) Hình vẽ bên là hình ảnh một chiếc Robik – 4 mặt , mỗi mặt đều được ghép bởi những tam giác đều nhỏ bằng nhau. Hãy cho biết có bao nhiêu tam giác đều có trên một mặt của chiếc Robic này ?



Lời giải

- a) Khối Rubik có dạng như hình bên thường được gọi là hình chóp tam giác đều.
- b) Số mặt là 4. Số cạnh là 6, số đỉnh là 1.

c) Có 13 tam giác đều có trên một mặt của chiếc Robik này.

**Dạng 2: Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.**

- **Sử dụng công thức tổng quát :**  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$

**Ví dụ 3.**

Một giỏ hoa gỗ mini có dạng hình chóp tam giác đều (như hình bên) có độ dài cạnh đáy là 10cm và độ dài trung đoạn bằng 20cm. Tính diện tích xung quanh giỏ hoa gỗ mini đó.

Lời giải:

Diện tích xung quanh giỏ hoa gỗ mini là :

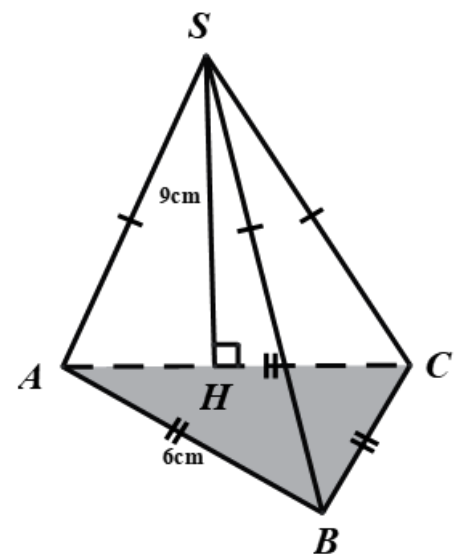
$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(3.10).20 = 300(cm^2)$$



**Ví dụ 4.**

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với kích thước như hình vẽ.

- Tính chu vi tam giác ABC .
- Cho biết độ dài trung đoạn hình chóp S.ABC.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều S.ABC.



Lời giải:

- Chu vi tam giác ABC là:  $C = 3a = 3.6 = 18$  (cm).
- Độ dài trung đoạn hình chóp S.ABC là  $d = SH = 9$  (cm)
- Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều S.ABC là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.18.9 = 81(cm^2)$$

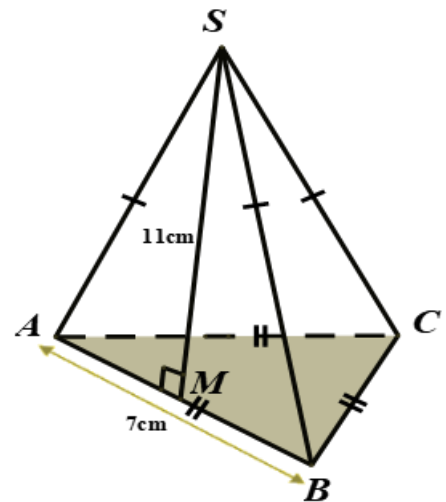
**Ví dụ 5.**

Cho một hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy AB bằng 7cm và đường cao của tam giác cân SAB là SM = 11cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều S.ABC.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều S.ABC là :

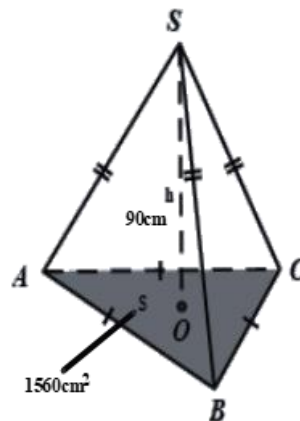
$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 3) \cdot 11 = 115,5 (cm^2)$$



**Dạng 3: Tính thể tích của hình chóp tam giác đều.**

- **Sử dụng công thức tổng quát :**  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

**Ví dụ 6.** Chóp inox đặt trên đỉnh núi Fansipan (Việt Nam) có dạng hình chóp tam giác đều với diện tích đáy khoảng 1560 cm<sup>2</sup> và chiều cao khoảng 90 cm. Tính thể tích của chóp inox trên đỉnh núi Fansipan (Việt Nam).



Lời giải

Thể tích của chóp inox trên đỉnh núi Fansipan (Việt Nam) là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1560 \cdot 90 = 46800 (cm^3)$$

**Ví dụ 7.**

a/ Một khối Rubic có dạng hình chóp tam giác đều. Biết chiều cao khoảng 5,88cm, thể tích của khối Rubic là 44,002 cm<sup>3</sup> . Tính diện tích đáy của khối Rubic.

Lời giải

Diện tích đáy của khối Rubic.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h \quad \text{Suy ra} \quad S = \frac{3V}{h} = \frac{3.44,002}{5,88} = 22,45(\text{cm}^2)$$

b/ Một hình chóp tam giác đều có thể tích là  $12\sqrt{3}\text{cm}^3$ , diện tích đáy là  $9\sqrt{3}\text{cm}^2$ . Tính chiều cao của hình chóp tam giác đều đó.

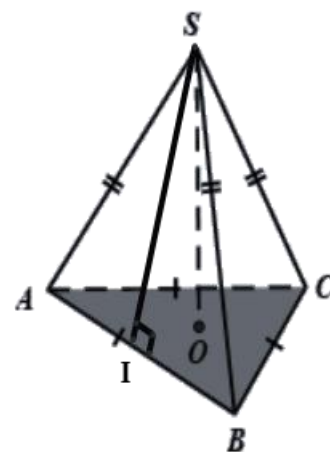
Lời giải

Chiều cao của hình chóp tam giác đều đó là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h \quad \text{Suy ra} \quad h = \frac{3V}{S} = \frac{3.12\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 4(\text{cm})$$

**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**Bài 1** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC như hình vẽ. Hãy điền vào chỗ trống (...) các ý cho đủ nghĩa .

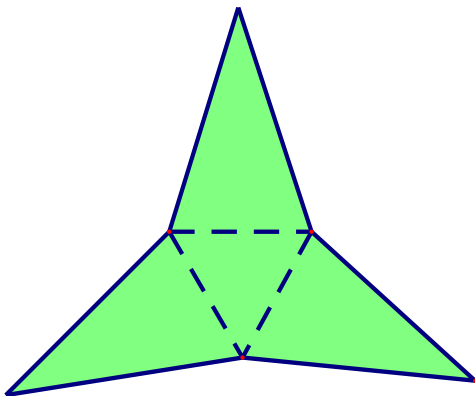


- a/ Tên mặt đáy là ....., đáy là hình.....
- b/ S gọi là .....của hình chóp tam giác đều.
- c/ Tên các mặt bên : .....
- Các mặt bên là hình.....bằng nhau.
- d/ SA, SB, SC gọi là .....của hình chóp tam giác đều.
- Các đoạn SA, SB, SC .....
- e/ Chiều cao của hình chóp tam giác đều là đoạn .....
- f/ Trung đoạn của hình chóp tam giác đều là đoạn .....
- g/ Công thức tổng quát diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều là .....
- h/ Công thức tổng quát thể tích của hình chóp tam giác đều là .....

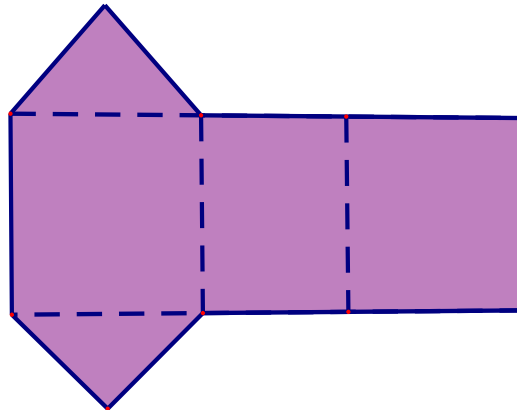
Lời giải

- a/ Tên mặt đáy là **ABC**, đáy là hình **tam giác đều**
- b/ S gọi là **đỉnh** của hình chóp tam giác đều.
- c/ Tên các mặt bên : **SAB; SBC; SAC**
- Các mặt bên là hình **tam giác cân** bằng nhau.
- d/ SA, SB, SC gọi là **canh bên** của hình chóp tam giác đều.
- Các đoạn SA, SB, SC **bằng nhau**.
- e/ Chiều cao của hình chóp tam giác đều là đoạn **SO**
- f/ Trung đoạn của hình chóp tam giác đều là đoạn **SI**
- g/ Công thức tổng quát diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều là  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$
- h/ Công thức tổng quát thể tích của hình chóp tam giác đều là  $V = \frac{1}{3}.S.h$

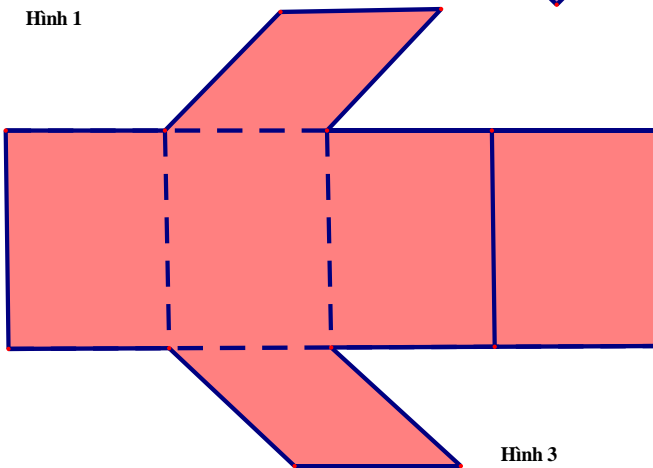
**Bài 2** Trong các miếng bìa ở hình 1; hình 2; hình 3; hình 4; miếng bìa nào có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tam giác đều ?



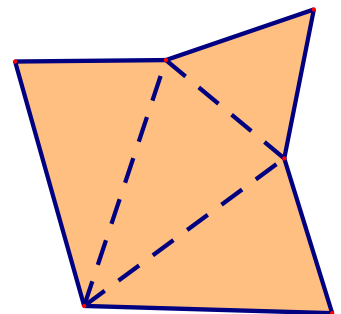
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Lời giải

Hình 1; hình 4 có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tam giác đều .

**Bài 3**

a/ Một chiếc đèn thả trần có dạng hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh đều khoảng 20cm. Độ dài trung đoạn khoảng 17,32 cm. Tính diện tích xung quanh của chiếc đèn thả trần đó.



b/ Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 4cm và chiều cao tam giác đáy là 3,5cm; trung đoạn bằng 5cm. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần (tức là tổng diện tích các mặt) của hình chóp.

Lời giải

a/ Diện tích xung quanh của chiếc đèn thả trần đó là :  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(3.20).17,32 = 519,6(cm^2)$

b/ Diện tích xung quanh của hình chóp là :  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(3.4).5 = 30(cm^2)$  .



c/ Diện tích toàn phần của hình chóp là :  $S_{tp} = S_{xq} + S = 30 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,5 = 37(cm^2)$

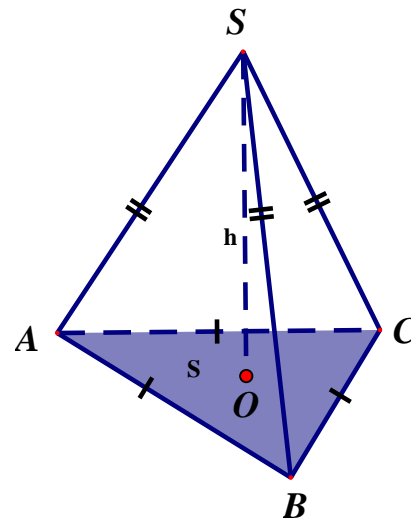
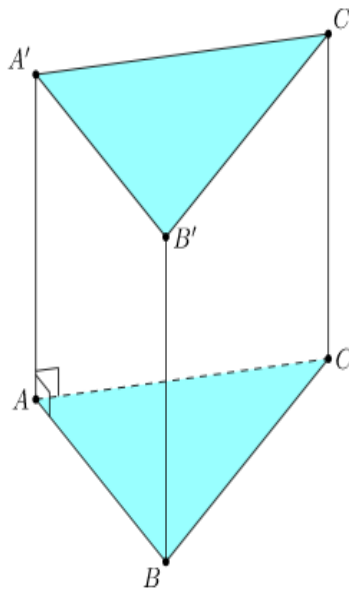
**Bài 4**

a/ Bộ nam châm xếp hình có dạng hình chóp tam giác đều (như hình ảnh bên) có độ dài cạnh đáy khoảng 6 cm và mặt bên có đường cao khoảng 7 cm. Tính diện tích xung quanh bộ nam châm xếp hình đó.



b/ Một hình chóp tam giác đều và một hình lăng trụ đứng tam giác đều như hình vẽ dưới đây (diện tích đáy, chiều cao của các hình khối bằng nhau).

Nếu thể tích lăng trụ đứng tam giác đều là V thì thể tích hình chóp tam giác đều là bao nhiêu ? Vì sao ?



Lời giải

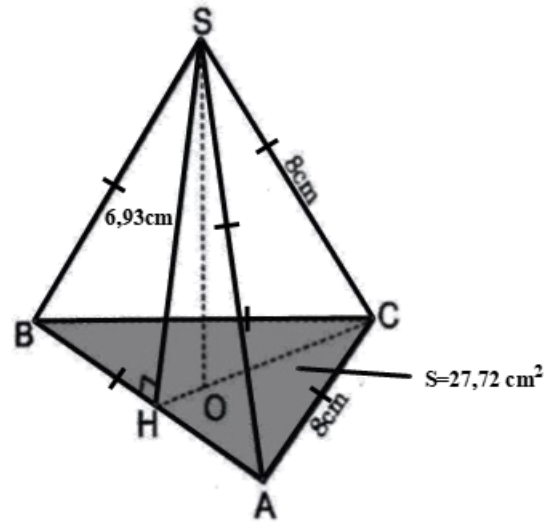
a/ Diện tích xung quanh bộ nam châm xếp hình đó là :  $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 6) \cdot 7 = 63(cm^2)$

b/ Hình chóp tam giác đều và hình lăng trụ đứng tam giác đều có cùng diện tích đáy và chiều cao thì thể tích lăng trụ đứng tam giác đều gấp 3 lần thể tích hình chóp tam giác đều. Do đó thể tích lăng trụ đứng tam giác đều là V thì thể tích hình chóp tam giác đều là  $\frac{V}{3}$ .

**Bài 5**

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với các kích thước như hình vẽ bên .

- a/ Cho biết độ dài trung đoạn của hình chóp S.ABC.
- b/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần ( tức là tổng các mặt ) của hình chóp S.ABC.
- c/ Tính thể tích của hình chóp tam giác đều S.ABC biết chiều cao của hình chóp khoảng 7,5 cm.



Lời giải

a/ Độ dài trung đoạn của hình chóp S.ABC là SH = 6,93cm.

b/ Diện tích xung quanh của hình chóp S.ABC là  $S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 8) \cdot 6,93 = 83,16 (cm^2)$

Diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC là  $S_{tp} = S_{xq} + S = 83,16 + 27,27 = 110,43 (cm^2)$

c/ Thể tích của hình chóp tam giác đều S.ABC là  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 27,27 \cdot 7,5 = 68,175 (cm^3)$

**Bài 6**

Một khối bê tông được làm có dạng hình chóp tam giác đều trong đó cạnh đáy hình chóp là 2m, trung đoạn của hình chóp là 3m. Người ta sơn ba mặt xung quanh của khối bê tông. Cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 30 000 đồng (tiền sơn và tiền công). Cần phải trả bao nhiêu tiền khi sơn ba mặt xung quanh ?

Lời giải

Diện tích xung quanh của khối bê tông là

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2) \cdot 3 = 9 (cm^2)$$

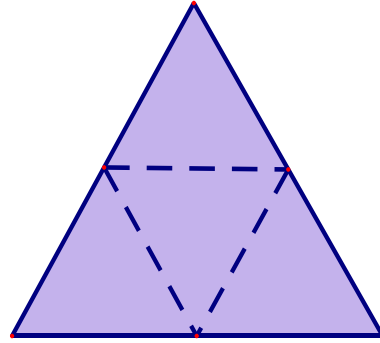
Cần phải trả số tiền khi sơn ba mặt xung quanh là  $9 \cdot 30000 = 270000$  (đồng).

**Bài 7**

Cho tam giác đều lớn . Khi gấp tam giác theo đường có gạch chấm, em có thể tạo thành hình chóp tam giác đều được không?

Lời giải

Khi gấp theo đường gạch chấm ta nhận được một hình chóp tam giác đều.



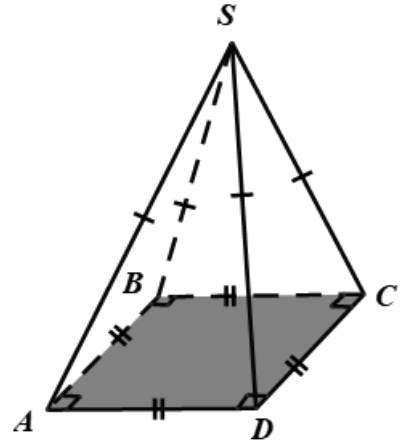


## HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

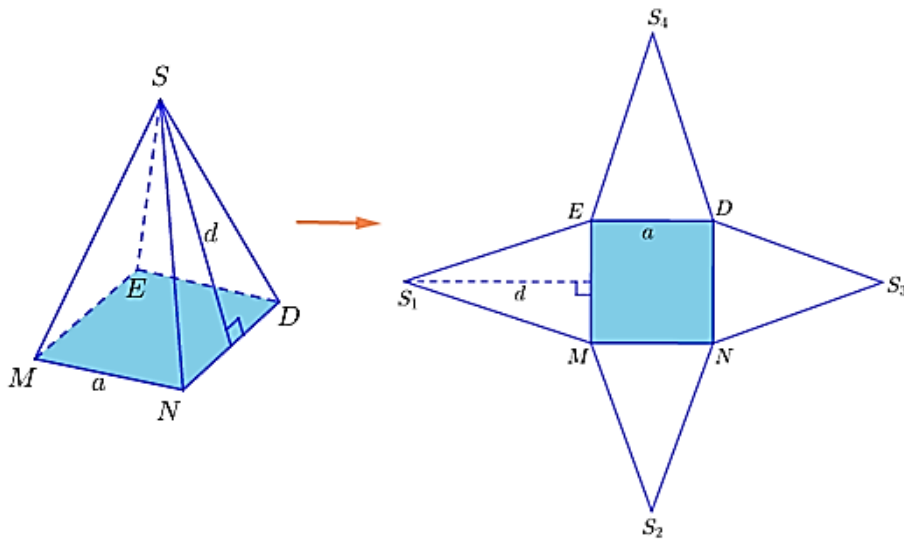
### A. KIẾN THỨC TRONG TÂM

#### 1. Hình chóp tứ giác đều.

- Hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  (như hình vẽ bên)
- Hình chóp tứ giác có 5 mặt, 8 cạnh.
- Mặt đáy  $ABCD$  là một hình vuông.
- Các mặt bên  $SAB$ ;  $SBC$ ;  $SCD$ ;  $SDA$  là những tam giác cân tại  $S$ .
- Các cạnh đáy  $AB$ ;  $BC$ ;  $CD$ ;  $DA$  bằng nhau.
- Các cạnh bên  $SA$ ;  $SB$ ;  $SC$ ;  $SD$  bằng nhau.
- $S$  gọi là đỉnh của hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ .

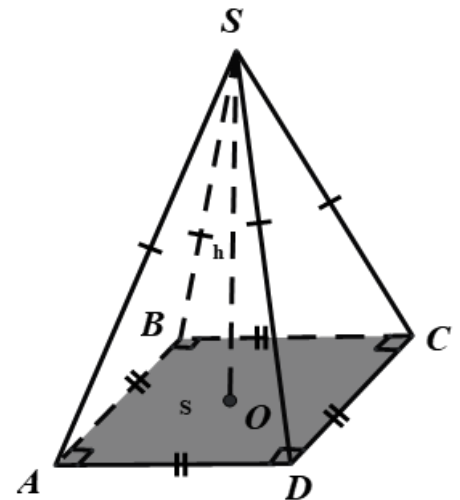


#### 2. Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều.



- Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều bằng nửa tích của chu vi đáy với độ dài trung đoạn.

- Công thức tổng quát :  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$  . Với :
  - +  $S_{xq}$  : Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.
  - + Chu vi đáy :  $C = 4.a$  ( $a$  là độ dài cạnh đáy hình vuông).
  - +  $d$  : Độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều.



**3. Thể tích hình chóp tứ giác đều.**

- Thể tích của hình chóp tứ giác đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy với chiều cao
- Công thức tổng quát :  $V = \frac{1}{3}.S.h$  . Với :
  - +  $V$  : Thể tích của hình chóp tứ giác đều.
  - +  $S$  : Diện tích đáy.
  - +  $h$  : Chiều cao của hình chóp tứ giác đều.

**B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

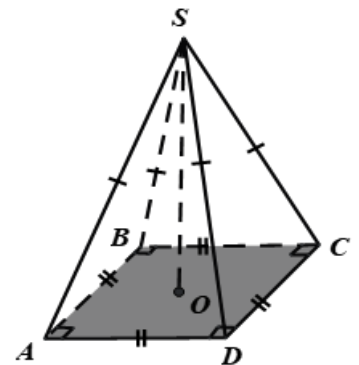
**Dạng 1: Nhận biết các kiến thức cơ bản của hình chóp tứ giác đều.**

- Dùng các kiến thức nêu trong phần Kiến thức trọng tâm

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều tứ giác đều  $S.ABCD$  có đường cao  $SO$ .

(Hình vẽ bên).

- a) Cho biết các mặt bên của hình chóp có dạng hình gì ? Nêu tên đỉnh của hình chóp.
- b) Kể tên các cạnh bên.
- c) Kể tên mặt đáy và các mặt bên của hình chóp.



Lời giải

- a) Các mặt bên của hình chóp có dạng hình tam giác cân. Đỉnh của hình chóp là đỉnh S.
- b) Các cạnh bên:  $SA, SB, SC, SD$ .
- d) Mặt đáy:  $ABCD$ . Mặt bên:  $SAB, SBC, SCD, SAD$

**Ví dụ 2:** Hình ảnh bên là bảo tàng Louvre bảo tàng nghệ thuật ở Pari có 4 mặt bên là tam giác cân ,1 mặt đáy là hình vuông.

- a) Bảo tàng Louvre bảo tàng nghệ thuật ở Pari có dạng như hình bên thường được gọi là hình gì ?
- b) Cho biết số mặt, số cạnh, số đỉnh của hình khối bên ?



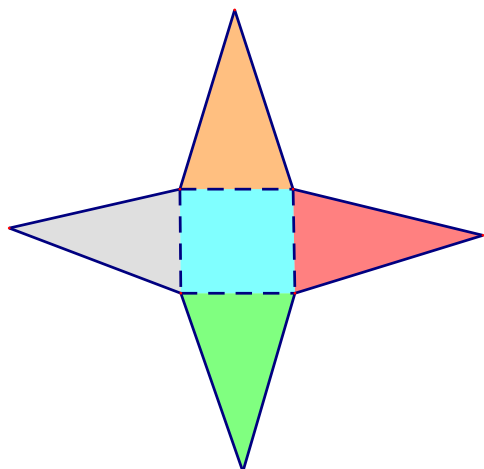
Bảo tàng Louvre

Lời giải

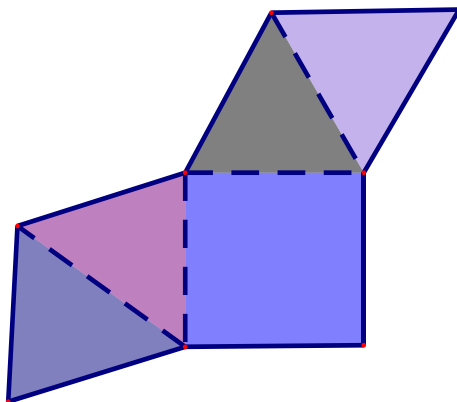
a) Bảo tàng Louvre bảo tàng nghệ thuật ở Pari có dạng như hình bên thường được gọi là hình chóp tứ giác đều.

b) Số mặt là 5. Số cạnh là 8, số đỉnh là 1.

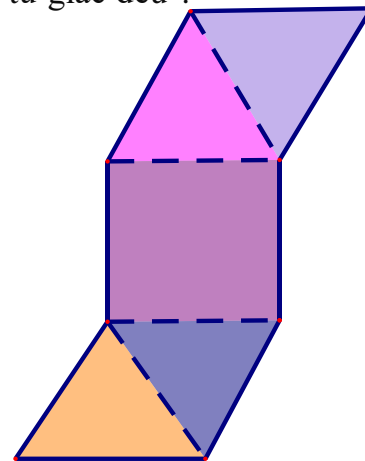
**Ví dụ 3:** Trong các hình sau , hình nào có thể gấp được thành hình chóp tứ giác đều ?



Hình a



Hình b



Hình c

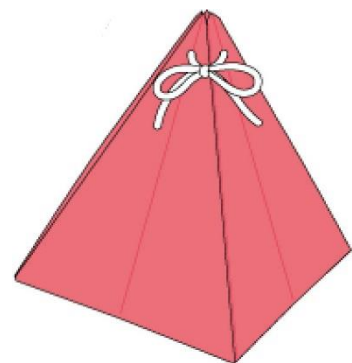
**Lời giải:** Cả 3 hình đều có thể gấp được thành hình chóp tứ giác đều

**Dạng 2: Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.**

▪ **Sử dụng công thức tổng quát :**  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$

**Ví dụ 4.**

Một túi quà có dạng hình chóp tứ giác đều (như hình bên) có độ dài cạnh đáy là 12cm và độ dài trung đoạn bằng 8cm. Tính diện tích xung túi quà đó.



**Lời giải:**

Diện tích xung quanh túi quà hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(4.12).8 = 192(cm^2)$$

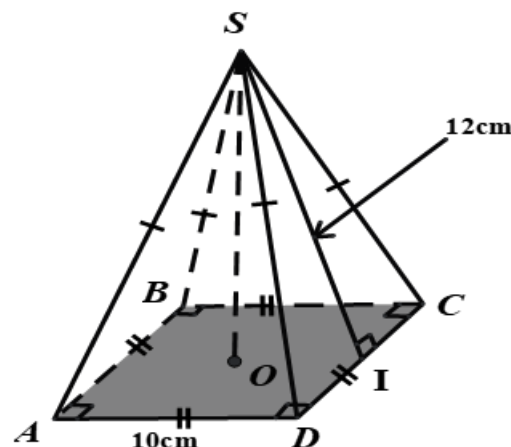
**Ví dụ 5.**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với kích thước như hình vẽ.

a) Tính chu vi đáy ABCD.

b) Cho biết độ dài trung đoạn hình chóp S.ABC.

c) Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều S.ABCD.



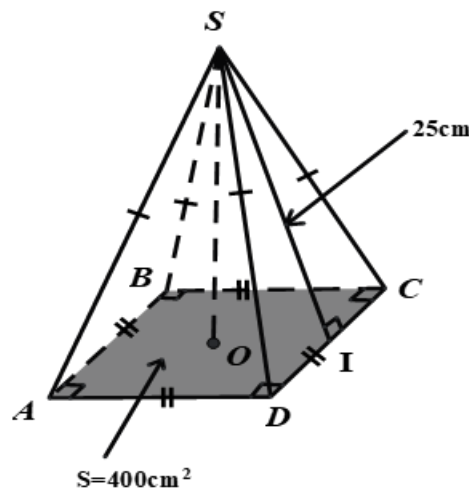
Lời giải:

- d) Chu vi tam giác ABC là:  $C = 4a = 4.10 = 40$  (cm).
- e) Độ dài trung đoạn hình chóp S.ABC là  $d = SI = 12$  (cm)
- f) Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều S.ABC là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.40.12 = 240(cm^2)$$

**Ví dụ 6.**

Cho một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có diện tích đáy là  $400cm^2$ , trung đoạn  $SI = 25cm$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần ( tức là tổng diện tích các mặt ) của hình chóp tứ giác đều S.ABCD.



Lời giải:

a/ Độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều S.ABCD là :

$$S = a^2 \text{ Suy ra } 400 = a^2 \text{ nên } a = 20$$

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều S.ABCD là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(4.20).25 = 1000(cm^2)$$

b/ Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều S.ABCD là :

$$S_{tp} = S_{xq} + S = 1000 + 20^2 = 1400(cm^2)$$

**Dạng 3: Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều.**

- **Sử dụng công thức tổng quát :**  $V = \frac{1}{3}.S.h$

**Ví dụ 7.**

a/ Kim tự tháp Kê - ôp ( thế kỉ 25 trước công nguyên) là một hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy bằng 233m; chiều cao hình chóp 146,5m. Tính thể tích kim tự tháp Kê - ôp ?

b/ Kim tự tháp Louvre (xây dựng vào năm 1988). Người ta làm mô hình một kim tự tháp ở công viên của bảo tàng Louvre. Mô hình có dạng hình chóp tứ giác đều có chiều cao 21m, độ dài cạnh đáy là 34m. Tính thể tích của kim tự tháp Louvre ?



Lời giải

a/ Thể tích kim tự tháp Kê - ôp là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot (233)^2 \cdot 146,5 = 2651112,8(m^3)$$

b/ Thể tích của kim tự tháp Louvre

$$V = \frac{1}{3} \cdot (34)^2 \cdot 21 = 8092(m^3)$$

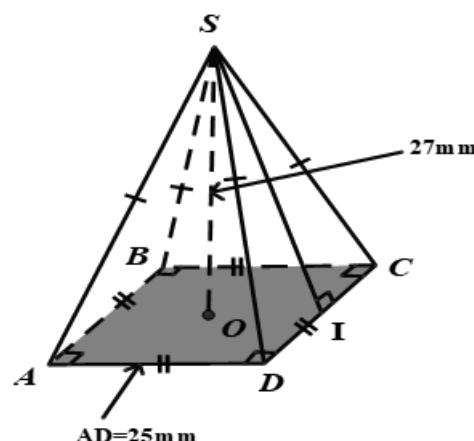
**Ví dụ 8.**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết AD = 25mm, SO = 27mm. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD ?

Lời giải

Thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25^2 \cdot 27 = 5625(mm^3)$$

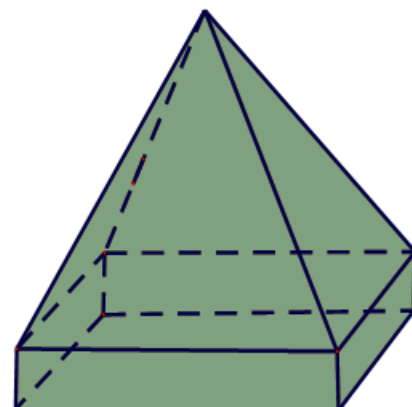


**Dạng 4: Các bài toán cơ bản về mối quan hệ giữa hình lập phương, hình hộp chữ nhật với hình chóp tứ giác đều**

- Vận dụng kiến thức về hình lập phương, hình hộp chữ nhật đã học, các dữ kiện liên quan và tính toán theo yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 9**

Một khối bê tông có dạng như hình vẽ bên. Phần dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông cạnh 40cm và chiều cao là 25cm. Phần trên của khối bê tông là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 40cm và chiều cao bằng 100cm. Tính thể tích khối bê tông?



Lời giải

Thể tích phần dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật là :  
 $40 \cdot 40 \cdot 25 = 40000 (cm^3)$



Thể tích phần trên của khối bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều là:

$$\frac{1}{3} \cdot 40^2 \cdot 100 \approx 53333,3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích khối bê tông là :  $40000 + 53333,3 = 93333,3 \text{ (cm}^3\text{)}$

### **Ví dụ 10**

Người ta muốn làm cái nhà kho bằng tôn hình lăng trụ tứ giác đều có mái che là bốn hình chóp tứ giác đều với kích thước đã cho trên hình .

a/ Tính diện tích tôn cần thiết dùng để lợp mái và che xung quanh, biết độ dài trung đoạn hình chóp là 8m.

b/ Tính thể tích không khí trong kho sau khi xây dựng xong .

Lời giải

a/Cạnh của hình chóp tứ giác đều là  $25 : 2 = 12,5 \text{ m}$

Diện tích xung quanh của 1 hình chóp tứ giác đều là

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 12,5) \cdot 8 = 200 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích xung quanh của 4 hình chóp tứ giác đều là :

$$4 \cdot 200 = 800 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là :  $4 \cdot 25 \cdot 20 = 2000 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích tôn cần thiết dùng để lợp mái và che xung quanh là  $800 + 2000 = 2800 \text{ (m}^2\text{)}$

b/ Thể tích của một hình chóp tứ giác đều là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12,5)^2 \cdot 5 = \frac{3125}{12} \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích của bốn hình chóp tứ giác đều là :

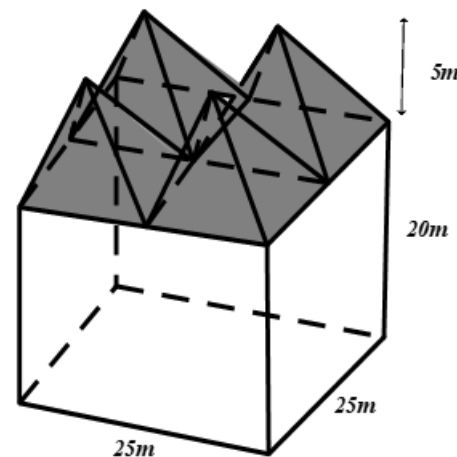
$$4 \cdot \frac{3125}{12} = \frac{3125}{3} \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật là :

$$25 \cdot 25 \cdot 20 = 12500 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích không khí trong kho sau khi xây dựng xong :

$$\frac{3125}{3} + 12500 \approx 13541,67 \text{ (m}^3\text{)}$$



**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**Bài 1** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD như hình vẽ.

Hãy điền vào chỗ trống (...) các ý cho đủ nghĩa .

- a/ Tên mặt đáy là ....., đáy là hình.....
- b/ S gọi là .....của hình chóp tứ giác đều.
- c/ Tên các mặt bên :.....

Các mặt bên là hình.....bằng nhau.

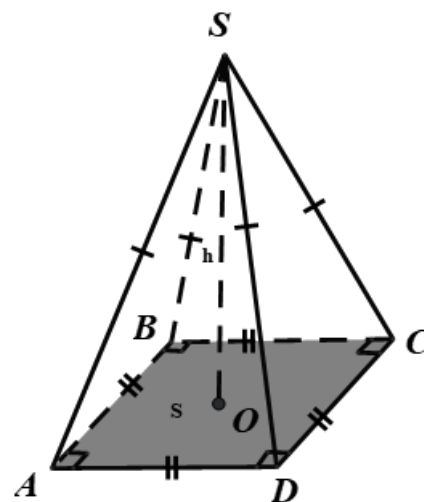
d/ SA, SB, SC, SD gọi là .....của hình chóp tứ giác đều.

Các đoạn SA, SB, SC, SD .....

e/ Chiều cao của hình chóp tứ giác đều là đoạn .....

f/ Công thức tổng quát diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là .....

g/ Công thức tổng quát thể tích của hình chóp tứ giác đều là .....



Lời giải

a/ Tên mặt đáy là **ABCD**, đáy là hình **vuông**

b/ S gọi là **đỉnh** của hình chóp tứ giác đều.

c/ Tên các mặt bên :**SAB; SBC; SCD; SAD**

Các mặt bên là hình **tam giác cân** bằng nhau.

d/ SA, SB, SC, SD gọi là **cạnh bên** của hình chóp tứ giác đều.

Các đoạn SA, SB, SC, SD **bằng nhau**.

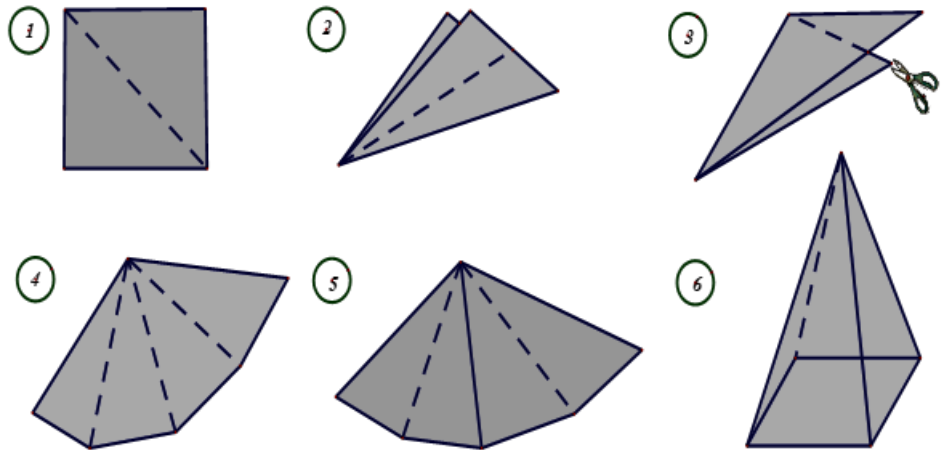
e/ Chiều cao của hình chóp tứ giác đều là đoạn **SO**

f/ Công thức tổng quát diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là  $S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d$

g/ Công thức tổng quát thể tích của hình chóp tứ giác đều là  $V = \frac{1}{3}.S.h$

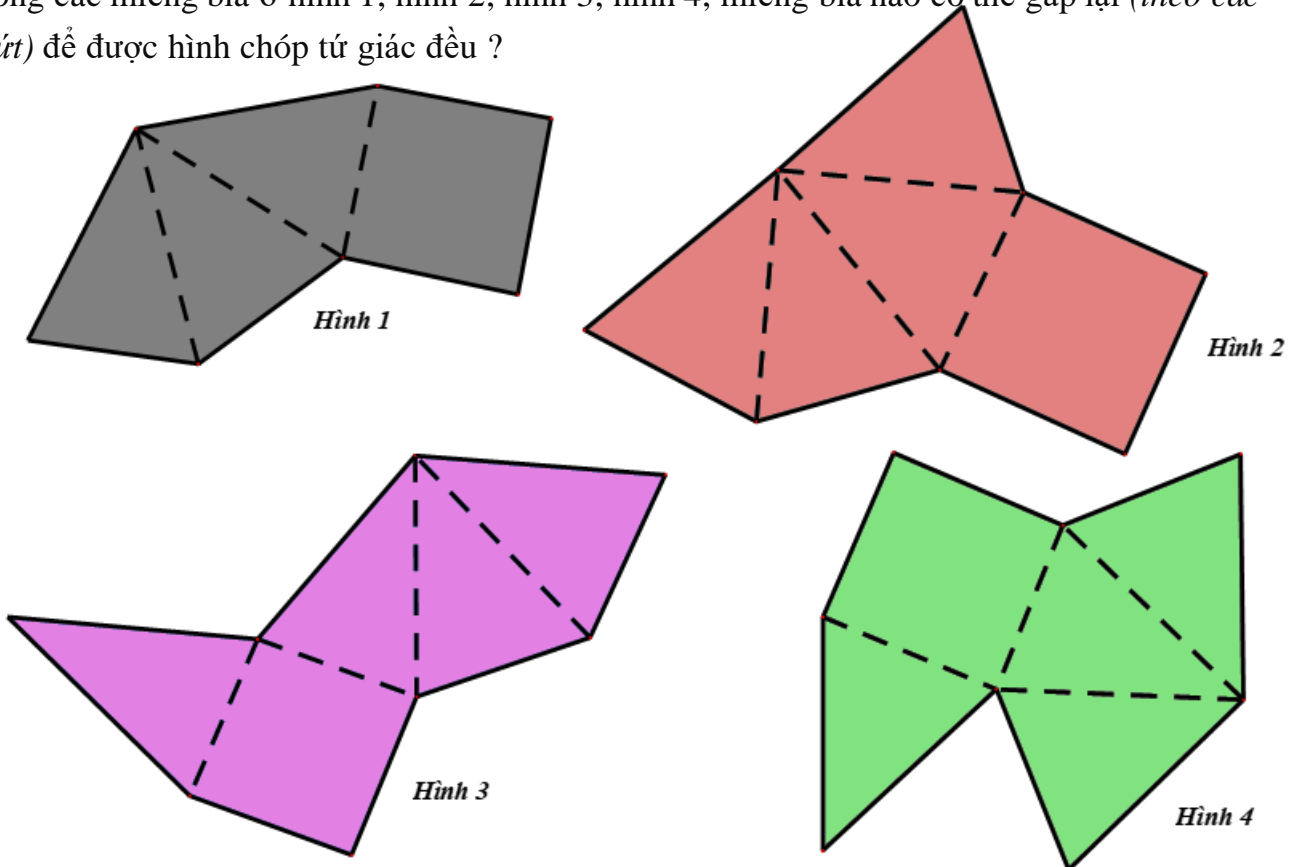
**Bài 2**

a/ **Thực hành:** Từ tờ giấy cắt ra một hình vuông rồi thực hiện các thao tác theo thứ tự từ 1 đến 6 để có thể ghép được các mặt bên của một hình chóp tứ giác (hình dưới).



**Lời giải:** Học sinh thực hành từ bước 1 đến bước 6 .

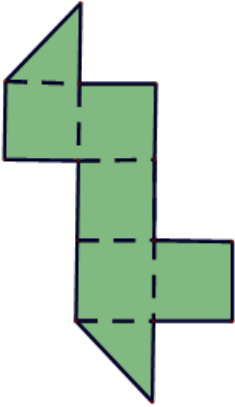
b/ Trong các miếng bìa ở hình 1; hình 2; hình 3; hình 4; miếng bìa nào có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tứ giác đều ?



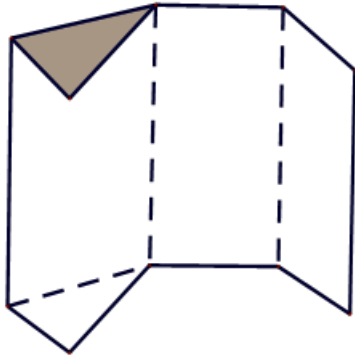
**Lời giải**

Hình 2; hình 3 có thể gấp lại (theo các nét đứt) để được hình chóp tứ giác đều .

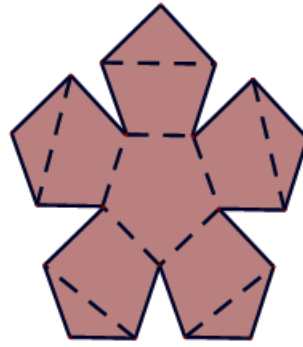
c/ Trong các miếng bìa ở hình 1; hình 2; hình 3; hình 4; miếng bìa nào không thể gấp được thành hình chóp tứ giác đều ?



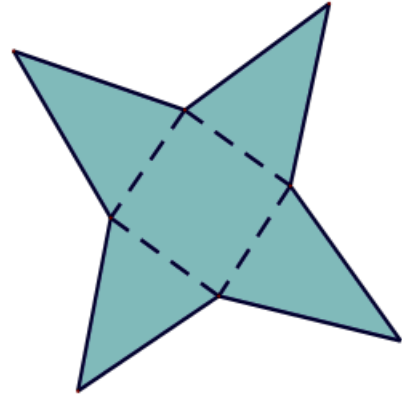
Hình 1



Hình 2



Hình 3

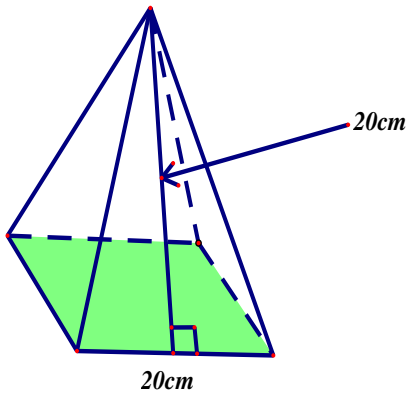


Hình 4

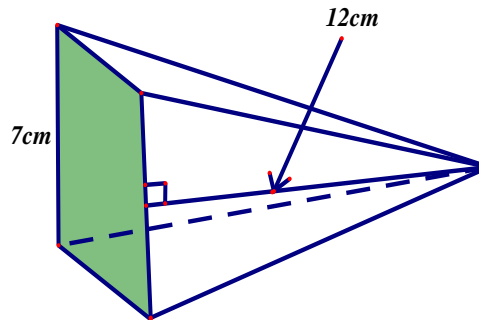
Lời giải

Hình 1; hình 2; hình 3 không thể gấp được thành hình chóp tứ giác đều .

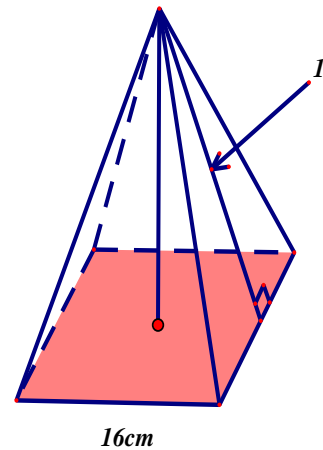
**Bài 3** Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần ( *tổng diện tích các mặt*) của các hình chóp tứ giác đều sau đây :



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Lời giải

**Hình 1:**

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot 20 = 800 (cm^2)$$

Diện tích toàn phần hình chóp tứ giác đều là :

$$800 + 20^2 = 1200 (cm^2)$$

**Hình 2:**

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 12 = 168 (cm^2)$$

Diện tích toàn phần hình chóp tứ giác đều là :

$$168 + 7^2 = 217 (cm^2)$$

**Hình 3:**

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 \cdot 15 = 480 (cm^2)$$

Diện tích toàn phần hình chóp tứ giác đều là :

$$480 + 16^2 = 736 (cm^2)$$

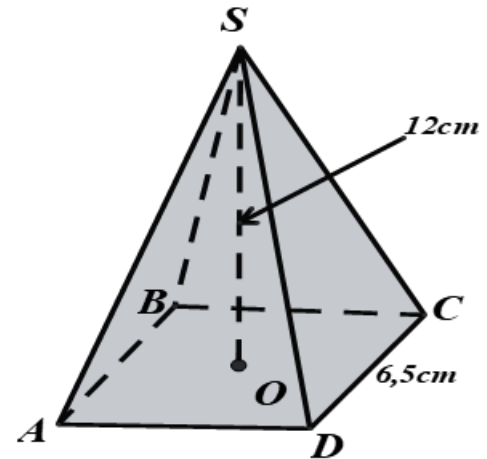
**Bài 4:**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết SO = 12 cm; CD = 6,5cm. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD ?

Lời giải

Thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (6,5)^2 \cdot 12 = 169(\text{cm}^3)$$

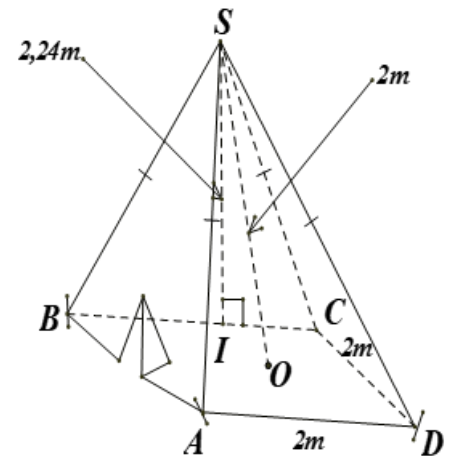


**Bài 5:**

Hình bên là một cái lều ở một trại hè của học sinh tham gia cắm trại có dạng hình chóp tứ giác đều theo các kích thước như hình vẽ:

a/ Thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu ?

b/ Xác định số vải bạt cần thiết để dựng lều (không tính đến đường viền, nếp gấp, ...) là bao nhiêu ? Biết độ dài trung đoạn của lều trại là 2,24 cm.



Lời giải

a/ Thể tích không khí bên trong lều chính là thể tích hình chóp tứ giác đều :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2,24 = \frac{8}{3} \approx 2,67(\text{m}^3)$$

b/ Số vải bạt cần thiết để dựng lều chính là diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều.

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 4) \cdot 2,24 \approx 8,96(\text{m}^2)$$

**Bài 6:**

Bộ đồ chơi gồm có chim đại bàng và hình chóp để giữ thăng bằng. Biết hình chóp để giữ thăng bằng là hình chóp tứ giác đều có cạnh 40mm; chiều cao hình chóp tứ giác đều đó là 52mm. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Thể tích của hình chóp tứ giác đều đó là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot (40 \cdot 40) \cdot 52 = 27733,3 \text{ (mm}^3\text{)}$$

**Bài 7:**

Bác Mai muốn may một cái lều cắm trại bằng vải bạt có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy là 2,5m, chiều cao của cái lều trại là 3m. Tính thể tích khoảng không bên trong lều ?



Lời giải

Thể tích khoảng không bên trong lều là :

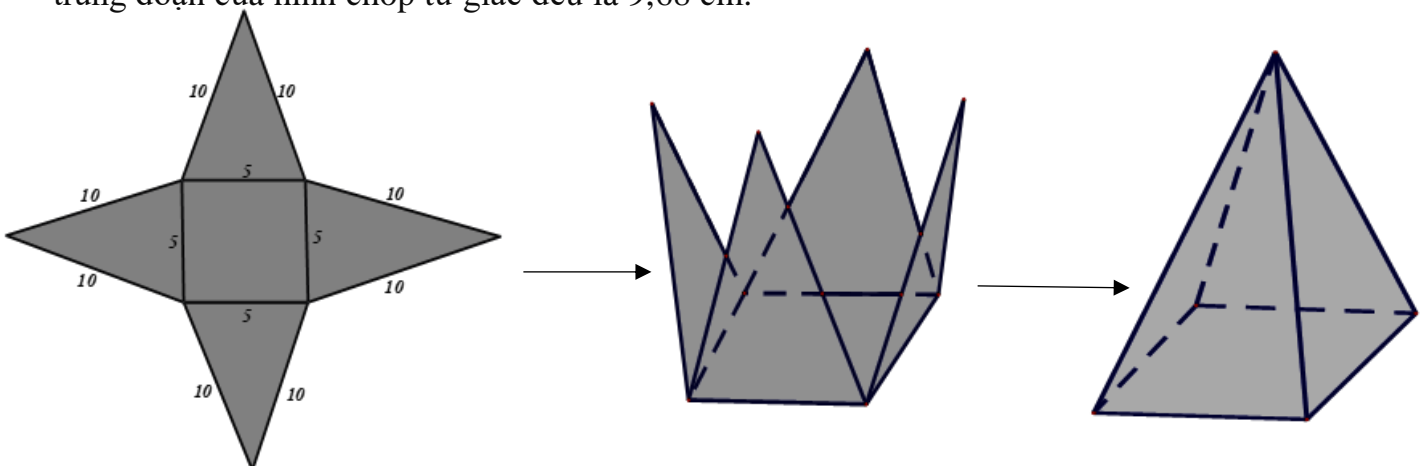
$$V = \frac{1}{3} \cdot (2,5 \cdot 2,5) \cdot 3 = 6,25 \text{ (m}^3\text{)}$$

**Bài 8:**

Vẽ, cắt và gấp mảnh bìa như đã chỉ ra ở hình bên dưới để được hình chóp tứ giác đều.

a/ Trong hình vẽ bên dưới có bao nhiêu tam giác cân bằng nhau ?

b/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều này? Biết độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều là 9,68 cm.



Lời giải

a/ Trong hình vẽ bên dưới có 4 tam giác cân bằng nhau.

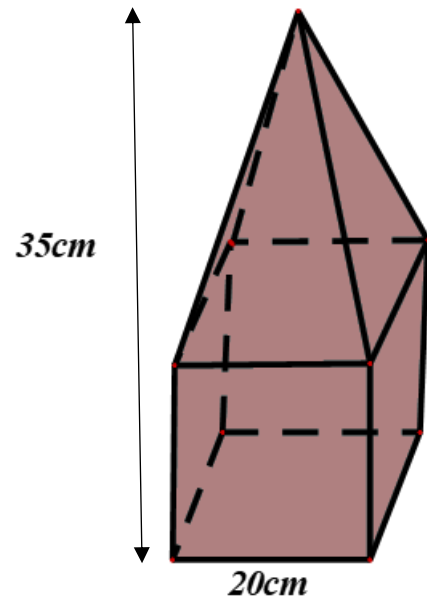
b/ Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4) \cdot 9,68 = 96,8 (cm^2)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều là :  $96,8 + 5^2 = 121,8 (cm^2)$

**Bài 9**

Tính thể tích của khối gỗ hình bên, biết rằng khối gỗ gồm một hình lập phương cạnh  $20cm$  và một hình chóp tứ giác đều. Chiều cao khối gỗ là  $35 cm$ .



Lời giải

Thể tích phần dưới của khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật là :

$$20^3 = 8000 (cm^3)$$

Chiều cao của khối gỗ có dạng hình chóp tứ giác đều là

$$35 - 20 = 15 (cm)$$

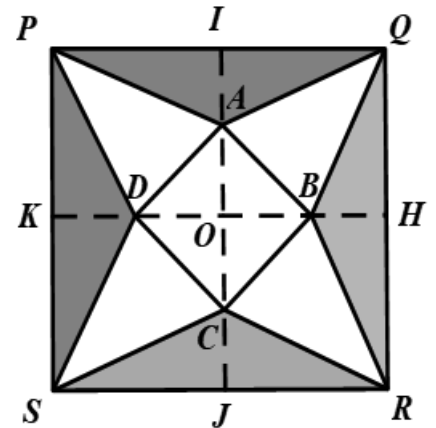
Thể tích phần trên của khối gỗ có dạng hình chóp tứ giác đều là:

$$\frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 15 = 2000 (cm^3)$$

Thể tích của khối gỗ là :  $8000 + 2000 = 10000 (cm^3)$

**Bài 10**

Một tấm bìa hình vuông  $PQRS$  cạnh  $8cm$ , tâm  $O$ , các trục đối xứng  $IJ, KH$ . Gọi  $A, B, C, D$  là các trung điểm các đoạn thẳng  $OI, OH, OJ, OK$ . Cắt bỏ bốn tam giác  $PAQ, QBR, RCS$  và  $SDP$  (phần tô màu) và gấp theo các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DA$  ta được hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Tính diện tích xung quanh hình chóp có được.



Lời giải

Diện tích xung quanh của hình chóp thì bằng bốn lần diện tích tam giác PAD.

$$S_{PAD} = S_{PIOK} - S_{PIA} - S_{PKD} - S_{AOD}$$

Mà :

$$S_{PIA} = S_{PKD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 (cm^2)$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 (cm^2)$$

$$S_{PIOK} = 4^2 = 16 (cm^2)$$

$$\Rightarrow S_{PAD} = 16 - 4 - 4 - 2 = 6 (cm^2)$$



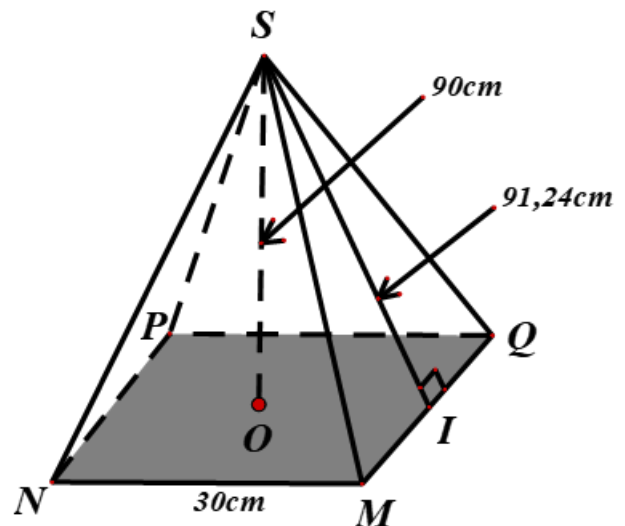
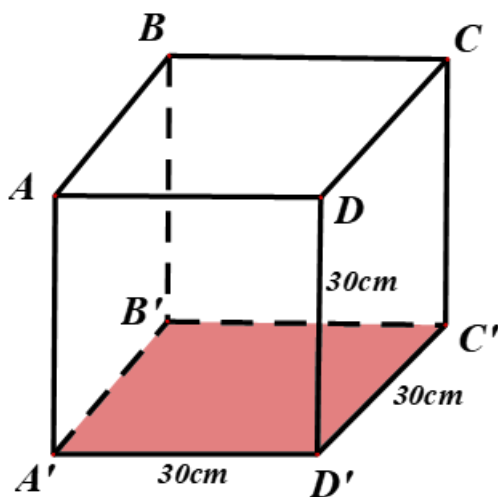
Vậy diện tích xung quanh hình chóp có được là :  $S_{xq} = 4.S_{PAD} = 4.6 = 24(cm^2)$

**Bài 11**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $30cm$  và hình chóp tứ giác đều  $S.MNPQ$  có chiều cao  $90cm$  và cạnh đáy  $30cm$ , độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều là  $91,24 cm$ .

a/ So sánh thể tích của hình lập phương và thể tích của hình chóp tứ giác đều.

b/ So sánh diện tích xung quanh của hình lập phương và diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.



Lời giải

a/

Thể tích của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  là :

$$V_1 = 30^3 = 27000(cm^3)$$

Thể tích hình chóp tứ giác đều  $S.PQMN$  là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (30)^2 \cdot 90 = 27000(cm^3)$$

Vậy thể tích của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng thể tích hình chóp tứ giác đều  $S.PQMN$ .

b/

Diện tích xung quanh của hình lập phương là

$$S_1 = 4.30^2 = 3600(cm^2)$$

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 30) \cdot 91,24 = 5474,4 (\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích xung quanh hình lập phương ABCD.A'B'C'D' bé hơn diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều S.PQMN.

**Bài 12**

Cho hình chóp tứ giác đều S.MNPQ như hình vẽ bên có chiều cao 15cm và thể tích là  $1280 \text{ cm}^3$ .

a/ Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp.

b/ Tính diện tích xung quanh của hình chóp biết, độ dài trung đoạn của hình chóp là 17cm.

Lời giải

a/

Độ dài cạnh đáy của hình chóp là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h \Rightarrow S = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 1280}{15} = 256 (\text{cm}^2)$$

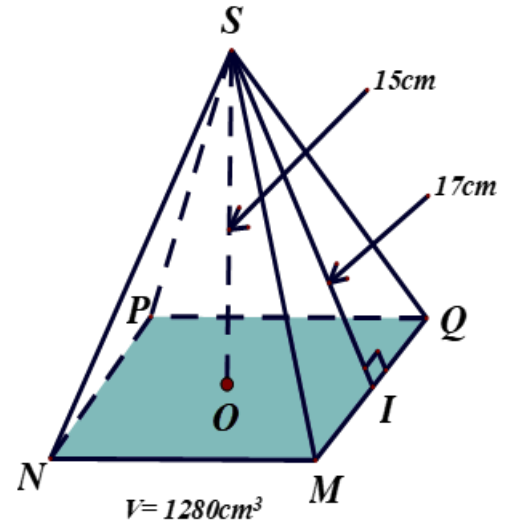
$$S = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{256} = 16 (\text{cm})$$

Vậy độ dài cạnh đáy của hình chóp là 16 (cm).

b/

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 16) \cdot 17 = 544 (\text{cm}^2)$$



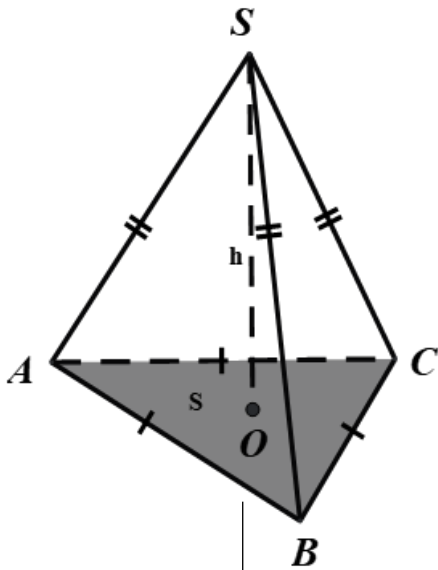
Ôn tập chương

# HÌNH HỌC TRỰC QUAN

## A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

### HÌNH CHÓP

Hình chóp tam giác đều



$$s_{xq} = \frac{1}{2} C.d$$

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

Trong đó :

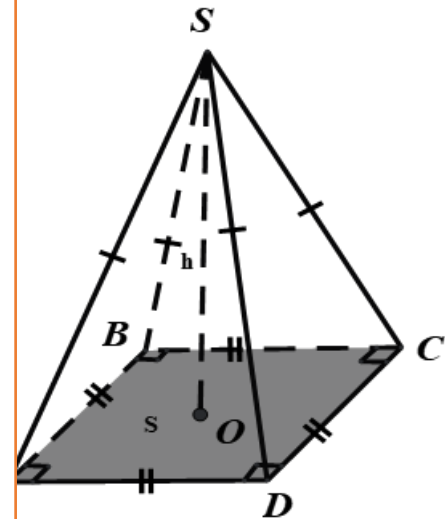
C: Chu vi đáy

d: Trung đoạn của hình chóp

S: Diện tích đáy

h: Chiều cao của hình chóp.

Hình chóp tứ giác đều

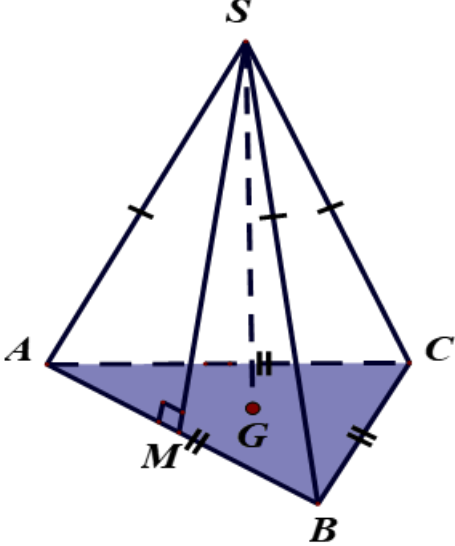
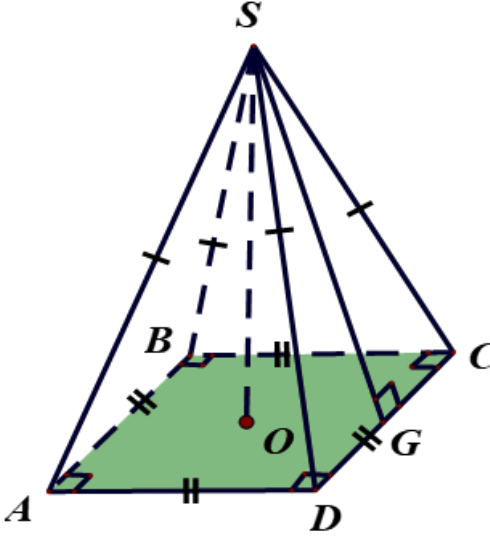


- Hình chóp tam giác đều có 4 mặt , 6 cạnh.
- Mặt đáy ABC là một tam giác đều.
- Các mặt bên SAB, SBC, SCA là những tam giác cân tại S.
- Các cạnh đáy AB, BC, CA bằng nhau
- Các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau.
- S gọi là đỉnh của hình chóp tam giác đều S.ABC.

- Hình chóp tứ giác đều có 5 mặt, 8 cạnh.
- Mặt đáy ABCD là một hình vuông .
- Các mặt bên SAB; SBC; SCD; SDA là những tam giác cân tại S.
- Các cạnh đáy AB; BC; CD; AD bằng nhau.
- Các cạnh bên SA; SB; SC; SD bằng nhau.
- S gọi là đỉnh của hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

**B. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG HÌNH HỌC TRỰC QUAN.**

**Câu 1:** Hoàn thành nội dung bảng sau :

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p><b>Hình</b></p>                           |  |  |
| <p>Tên gọi của hình chóp</p>                 |  |  |
| <p>Tên đỉnh hình chóp</p>                    |  |  |
| <p>Tên mặt đáy hình chóp</p>                 |  |  |
| <p>Tên các mặt bên hình chóp</p>             |  |  |
| <p>Tên các cạnh bên ; cạnh đáy hình chóp</p> |  |  |
| <p>Tên trung đoạn hình chóp</p>              |  |  |

|                                |  |  |
|--------------------------------|--|--|
| <b>Tên chiều cao hình chóp</b> |  |  |
|--------------------------------|--|--|

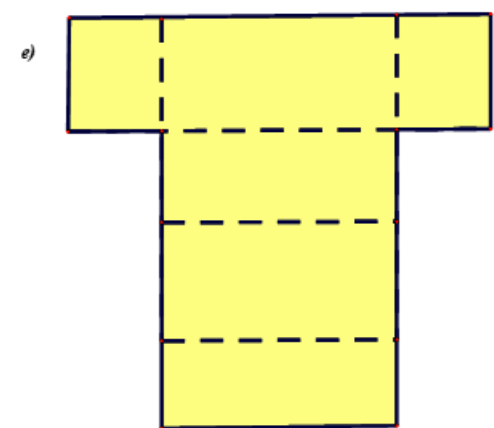
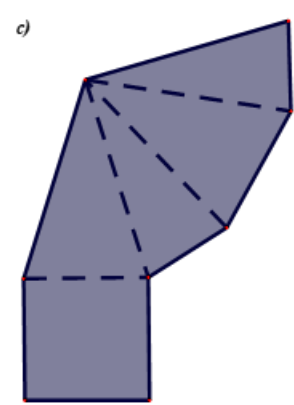
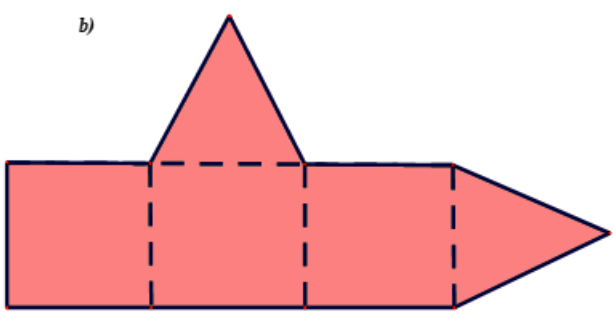
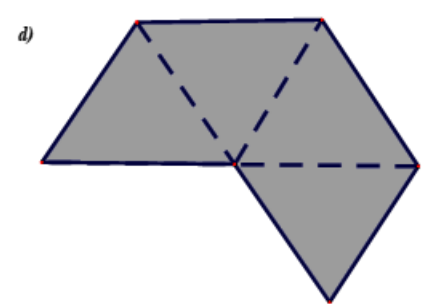
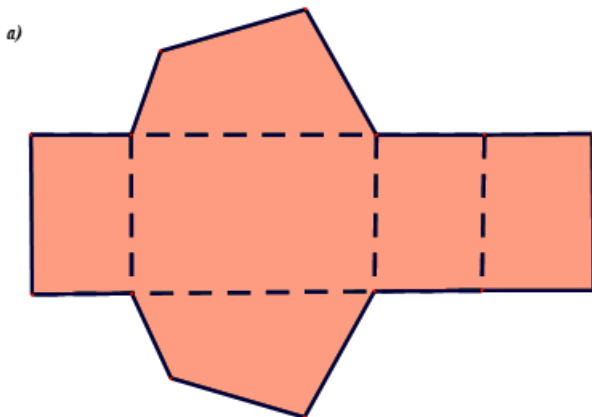
Lời giải:

|                                  |                                |                                     |
|----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| <b>Hình</b>                      |                                |                                     |
| <b>Tên gọi của hình chóp</b>     | <i>Hình chóp tam giác đều</i>  | <i>Hình chóp tứ giác đều</i>        |
| <b>Tên đỉnh hình chóp</b>        | <i>Đỉnh S</i>                  | <i>Đỉnh S</i>                       |
| <b>Tên mặt đáy hình chóp</b>     | <i>Mặt đáy ABC</i>             | <i>Mặt đáy ABCD</i>                 |
| <b>Tên các mặt bên hình chóp</b> | <i>Mặt bên : SAB; SBC; SAC</i> | <i>Mặt bên : SAD; SDC; SBC; SAB</i> |

|  |   |   |
|--|---|---|
| <b>Tên các cạnh bên , cạnh đáy hình chóp</b> | <i>Cạnh bên: SA; SB; SC;<br/>Cạnh đáy AB; BC; AC;</i> | <i>Cạnh bên: SA; SB; SC;SD<br/>Cạnh đáy AB; BC; CD; AD.</i> |
| <b>Tên trung đoạn hình chóp</b>              | <i>SM</i>   | <i>SG</i>   |
| <b>Tên chiều cao hình chóp</b>               | <i>SG</i>   | <i>SO</i>   |

**Câu 2:**

Trong các hình vẽ bên dưới hình nào có thể gấp được hình chóp tam giác đều, hình nào có thể gấp được hình chóp tứ giác đều ?



**Lời giải:**

Có thể gấp được hình chóp tam giác đều là hình d, hình chóp tứ giác đều là hình c.

**Câu 3:**

a/ Tính thể tích của hình chóp tam giác đều, biết diện tích đáy bằng  $6\text{cm}^2$  và chiều cao bằng  $4\text{cm}$

b/ Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều, biết chiều cao bằng  $10\text{cm}$  và cạnh đáy bằng  $4\text{cm}$ .

c/ Tính độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều biết diện tích xung quanh của hình chóp là  $60\text{cm}^2$ , độ dài cạnh đáy  $6\text{cm}$ .

d/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều biết cạnh đáy là  $12\text{cm}$ , chiều cao mặt bên là  $8\text{cm}$ .

e/ Tính chu vi đáy của hình chóp tứ giác đều biết thể tích của hình chóp là  $125\text{cm}^3$ , chiều cao của hình chóp là  $15\text{cm}$ .

f/ Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều biết độ dài cạnh đáy là  $10\text{cm}$ , trung đoạn của hình chóp là  $12\text{cm}$ .

### Lời giải

a/ Thể tích của hình chóp tam giác đều là :  $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8(\text{cm}^3)$  .

b/ Thể tích của hình chóp tứ giác đều là :  $V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 4 = \frac{40}{3}(\text{cm}^3)$  .

c/ Ta có :  $S_{xq} = \frac{1}{2} C \cdot d \Rightarrow d = \frac{2S_{xq}}{C} = \frac{2 \cdot 60}{4 \cdot 6} = \frac{120}{24} = 5(\text{cm}^2)$  .

d/ Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 12) \cdot 8 = 192\text{cm}^2 .$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều là :

$$192 + 12 \cdot 12 = 336 \text{ cm}^2 .$$

e/ Ta có :  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

$$S = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 125}{15} = 25\text{cm}^2 .$$

Cạnh của hình vuông là :  $\sqrt{25} = 5\text{cm}$

Chu vi đáy của hình chóp tứ giác đều :  $4.5 = 20 \text{ cm}$ .

f/ Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} C.d = \frac{1}{2} .(3.10).12 = 180 \text{ cm}^2 .$$

**Câu 4:**

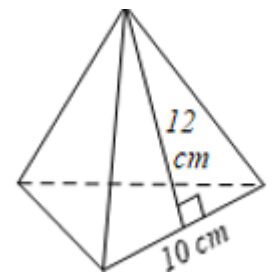
a/ Một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy 5cm, trung đoạn 6,5cm, chiều cao hình chóp là 6cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều ?

b/ Cho hình chóp tứ giác đều có chu vi mặt đáy bằng 40cm, trung đoạn bằng 13cm, chiều cao hình chóp bằng 12cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều?

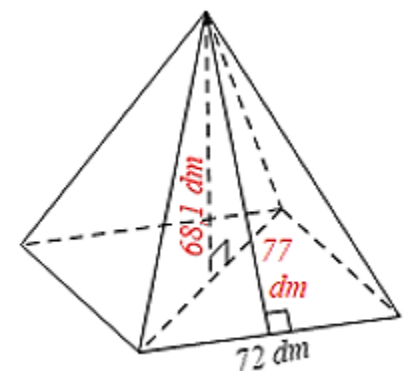
c/ Một hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng 15cm, trung đoạn bằng 17cm, độ dài cạnh đáy của hình chóp bằng 16cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần ( tổng diện tích các mặt của hình chóp), thể tích của hình chóp tứ giác đều ?

d/ Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy 8cm, trung đoạn bằng 5cm. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần ( tổng diện tích các mặt của hình chóp) của hình chóp tứ giác đều đó ?

e/ Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy là 10 cm, chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp tam giác đều là 12 cm.



f/ Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 72 dm, chiều cao là 68,1 dm, chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp tứ giác đều là 77 dm.



**Lời giải:**

a/ Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} .C.d = \frac{1}{2} .(4.5).6,5 = 65(\text{cm}^2) .$$



Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

$$65 + 5.5 = 90 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b/ Cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều là :

$$40 : 4 = 10 \text{ (cm)}$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều là :

$$V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.(10.10).12 = 400(\text{cm}^3)$$

c/

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(4.16).17 = 544(\text{cm}^2).$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

$$544 + 16.16 = 800 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều :

$$V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.(16.16).15 = 1280(\text{cm}^3)$$

d/

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(3.10).12 = 180(\text{cm}^2).$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

$$80 + 8.8 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$$

e/ Diện tích xung quanh hình chóp tam giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(4.5).6,5 = 65(\text{cm}^2).$$

f/ Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}.C.d = \frac{1}{2}.(4.72).77 = 11088(\text{dm}^2).$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

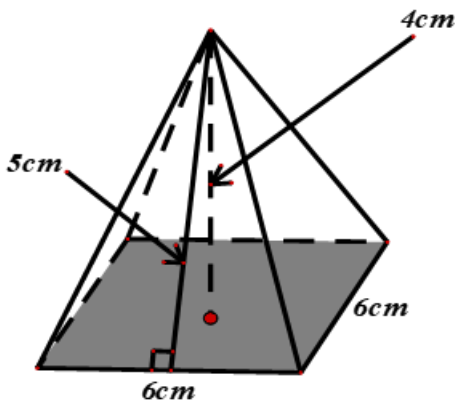
$$11088 + 5184 = 16\,272 \text{ (dm}^2\text{)}$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều :

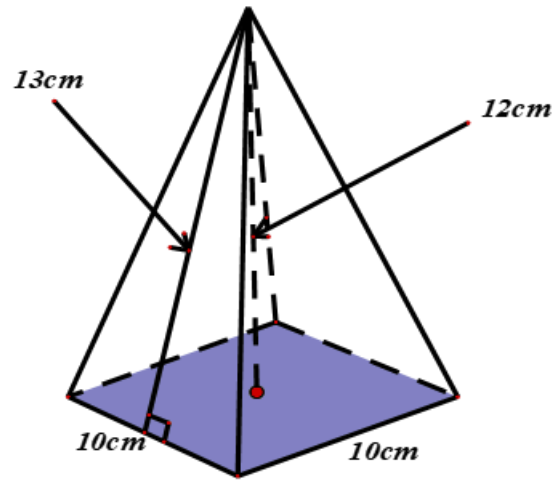
$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (72 \cdot 72) \cdot 68,1 = 117676,8 \text{ (dm}^3\text{)}$$

**Câu 5:**

Tính diện tích xung quanh và thể tích toàn phần (tổng diện tích các mặt); thể tích của hình chóp tứ giác đều dưới đây (theo các kích thước cho trên hình vẽ).



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

**Hình 1**

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} . C . d = \frac{1}{2} . (4.6) . 5 = 60(\text{cm}^2)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

$$60 + 6 . 6 = 96 (\text{cm}^2)$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều :

$$V = \frac{1}{3} . S . h = \frac{1}{3} . (6.6) . 4 = 48(\text{cm}^3)$$

**Hình 2**

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} . C . d = \frac{1}{2} . (4.10) . 13 = 260(\text{cm}^2)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều :

$$260 + 10.10 = 360 (\text{cm}^2)$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (10 \cdot 10) \cdot 12 = 400(\text{cm}^3)$$

**Câu 6:**

Người ta thiết kế chậu trồng cây có dạng hình chóp tam giác đều (như hình vẽ bên) biết : cạnh đáy khoảng 20cm, chiều cao khoảng 35 cm, độ dài trung đoạn khoảng 21 cm.



a/ Người ta muốn sơn các bề mặt xung quanh chậu . Hỏi diện tích bề mặt cần sơn là bao nhiêu ?

b/ Tính thể tích của chậu trồng cây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết đường cao của mặt đáy hình chóp là 17cm .

**Lời giải:**

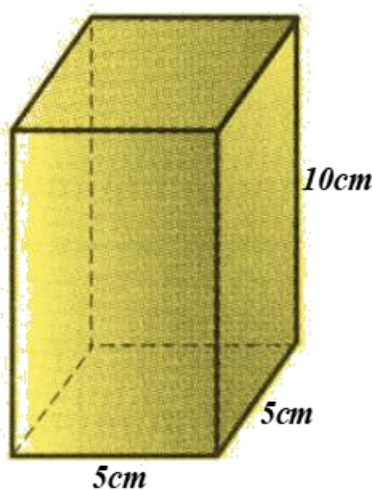
a/ Diện tích bề mặt cần sơn là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 20) \cdot 21 = 630(\text{cm}^2)$$

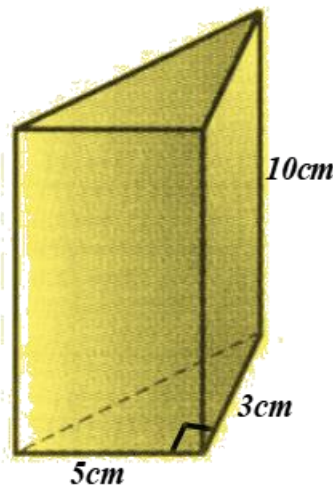
b/ Thể tích của chậu trồng cây đó là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17\right) \cdot 35 = 1983,33(\text{cm}^3)$$

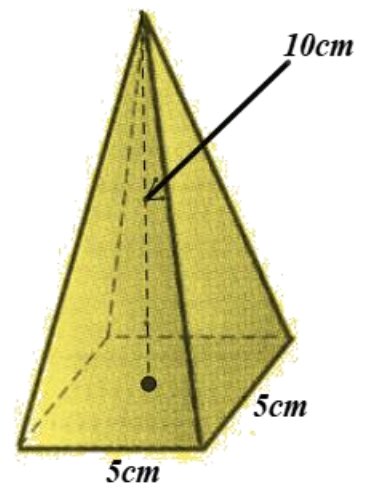
**Câu 7:** Cho các hình khối và các kích thước như hình vẽ:



Hình a



Hình b



Hình c

a/ Cho biết các dạng hình khối ở mỗi hình vẽ trên ?

b/ Tính thể tích của mỗi hình khối đó. Từ đó hãy so sánh thể tích *hình a* và *c* rồi rút ra nhận xét ?

Lời giải:

a/ Các dạng hình khối ở mỗi hình vẽ :

*Hình a:* Hình hộp chữ nhật.

*Hình b:* Hình lăng trụ đứng tam giác.

*Hình c:* Hình chóp tứ giác đều .

b/ Thể tích hình hộp chữ nhật là :  $V = 5.5.10 = 250(cm^3)$  .

Thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác vuông là  $V = \frac{1}{2}.3.5.10 = 75(cm^3)$  .

Thể tích của hình chóp tứ giác đều là  $V = \frac{1}{3}.5.5.10 = \frac{250}{3}(cm^3)$  .

Nhận xét : Nếu hình chóp tứ giác đều và hình hộp chữ nhật có cùng diện tích đáy và chiều cao thì thể tích của hình hộp chữ nhật gấp 3 lần thể tích của hình chóp tứ giác đều.

Câu 8:

Một kim tử tháp pha lê đen có dạng hình chóp tứ giác đều biết, độ dài cạnh đáy là 8,5cm , chiều cao là 9,5cm. Tính thể tích của kim tử tháp pha lê đen đó (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).



Lời giải:

Thể tích của kim tử tháp pha lê đen là :

$$V = \frac{1}{3}.8,5.8,5.9,5 = 228,8(cm^3)$$

**Câu 9:** Kim tự tháp kính Louvre là một kim tự tháp được xây bằng kính và kim loại nằm ở giữa sân Napoleon của bảo tàng Louvre, Paris. Được xây theo yêu cầu của Tổng thống Pháp Francois Mitterrand vào năm 1983, công trình là tác phẩm của kiến trúc sư nổi tiếng người Mỹ gốc Hoa Leoh Ming Pei. Toàn bộ kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều được xây phủ kín bằng kính cùng các khớp nối kim loại, với trung đoạn của hình chóp là 27cm, đáy là hình vuông cạnh 35m. Giả sử coi các khớp nối không đáng kể, hãy tính diện tích kính tối thiểu dùng để phủ kín toàn bộ bề mặt kim tự tháp kính Louvre.



Bảo tàng Louvre

Lời giải

Diện tích kính tối thiểu dùng để phủ kín toàn bộ bề mặt kim tự tháp kính Louvre chính là diện tích xung quanh của kim tự tháp.

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (35 \cdot 4) \cdot 27 = 1890(\text{cm}^2)$$

**Câu 10:**

Một giá đèn cây có dạng hình chóp tứ giác đều như hình bên có độ dài cạnh đáy là 14cm; chiều cao của giá đèn cây là 22cm. Mặt bên của giá đèn cây là các tam giác cân có chiều cao là 23cm.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của giá đèn cây có dạng hình chóp tứ giác đều với kích thước như trên.



Lời giải:

Diện tích xung quanh của giá đèn cây hình chóp tứ giác đều :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 14) \cdot 23 = 644(\text{cm}^2)$$

Thể tích của giá đèn cây hình chóp tứ giác đều :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (14 \cdot 14) \cdot 22 = \frac{4312}{3} (\text{cm}^3)$$

**Câu 11:**

Đèn đá muối Himalaya là một loại đèn độc đáo có bộ phận chụp đèn làm từ tinh thể muối. Hình bên là một chiếc chụp đèn đá muối có dạng hình chóp tứ giác đều (không tính phần chân đế của đèn).

Biết mặt bên của chụp đèn là một tam giác đều có cạnh bằng 20cm, đường cao của các mặt bên bằng 22,4 cm. Tính diện tích xung quanh của phần chụp đèn.



Lời giải

Diện tích xung quanh của phần chụp đèn là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 20) \cdot 22,4 = 896 (\text{cm}^2)$$

**Câu 12:**

Hình bên là một cái hộp giấy hình chóp tam giác đều do bạn Lan tự tay làm để đựng quà sinh nhật tặng cho bạn thân. Biết diện tích đáy của hình chóp bằng  $170\text{cm}^2$ , chiều cao của hình chóp bằng 16cm.

Thể tích của chiếc hộp là bao nhiêu ? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Thể tích của chiếc hộp là  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 170 \cdot 16 = 906,7 (\text{cm}^3)$

**Câu 13:**

Tính thể tích của một chiếc hộp bánh ít có dạng hình chóp tứ giác đều, có độ dài cạnh đáy là 3 cm và chiều cao là 3,5 cm.

Lời giải :



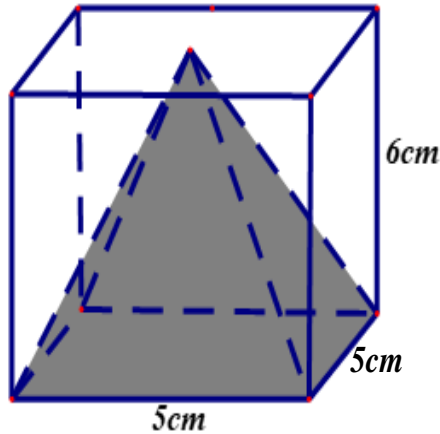
Thể tích của một chiếc hộp bánh ít có dạng hình chóp tứ giác đều là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3,5 = 10,5(\text{cm}^3)$$



**Câu 14:**

Tính thể tích của hình chóp ở bên trong hình hộp chữ nhật với kích thước như hình vẽ.

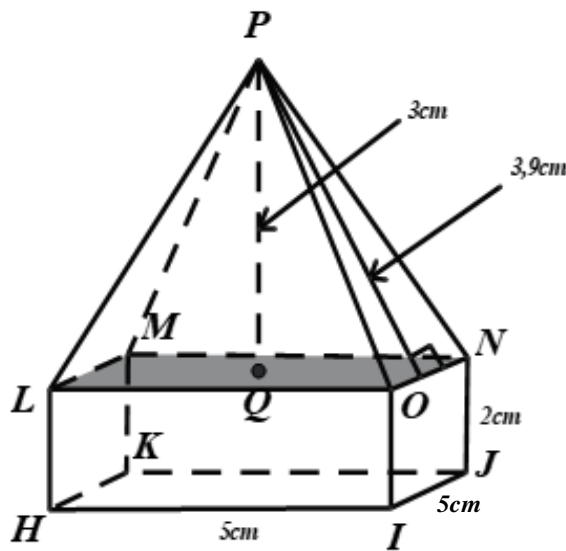
**Lời giải:**

Chiều cao của hình chóp tứ giác đều chính là chiều cao của hình hộp chữ nhật

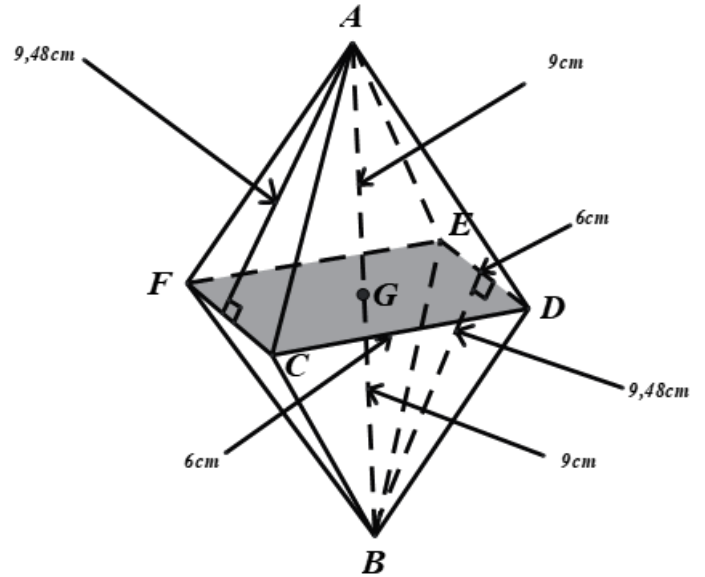
Khi đó thể tích của hình chóp ở bên trong hình hộp chữ nhật là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (5 \cdot 5) \cdot 6 = 50(\text{cm}^3)$$

**Câu 15:** Hãy tính diện tích mặt ngoài theo các kích thước cho ở hình dưới đây. Biết rằng hình 1 gồm một hình chóp tứ giác đều và một hình hộp chữ nhật. Hình 2 gồm hai hình chóp tứ giác đều.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

**Hình 1:**

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là :

$$\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 5) \cdot 3,9 = 39 (cm^2).$$

Diện tích xung quang của hình hộp chữ nhật là :

$$2 \cdot (5 + 5) \cdot 2 = 40 (cm^2).$$

Diện tích đáy hình hộp chữ nhật là :

$$5 \cdot 5 = 25 (cm^2).$$

Diện tích mặt ngoài của hình 1 là :

$$39 + 40 + 25 = 104 (cm^2).$$

**Hình 2:**

Diện tích mặt ngoài hình 2 chính là diện tích xung quanh của hai hình chóp tứ giác đều là :

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 6) \cdot 9,48 = 227,52 (cm^2)$$

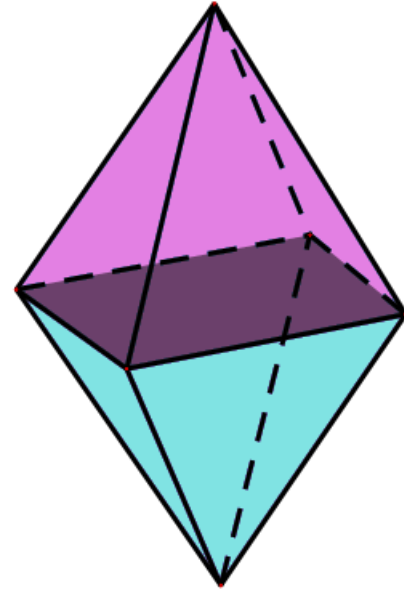
**Câu 16:**

Bạn Hà làm một cái lồng đèn hình quả trám (*xem hình bên*) là hình ghép từ hai hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy 20cm, cạnh bên 32cm, khoảng cách giữa hai đỉnh của hai hình chóp là 30cm.

a/ Tính thể tích của lồng đèn.

b/ Bạn Hà muốn làm 50 cái lồng đèn hình quả trám này cần phải chuẩn bị bao nhiêu mét thanh tre ?

(*mỗi nối giữa các que tre có độ dài không đáng kể*) ?



Lời giải

a/

Chiều cao của mỗi hình chóp tứ giác đều là :

$$30 : 2 = 15 \text{ (cm)}.$$

Thể tích của lồng đèn quả trám là :

$$V = 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 20 \cdot 15 \right) = 4000 \text{ (cm}^3 \text{)}$$

b/

Bạn Hà muốn làm 50 cái lồng đèn hình quả trám này cần phải chuẩn bị số mét thanh tre là :  $50 \cdot (20 \times 4 + 32 \times 8) = 16800 \text{ (cm)}$

**Câu 17:** Cho hình khối bên (với kích thước có trong hình vẽ) .

Biết rằng hình khối được tạo bởi 3 hình chóp tam giác đều biết chiều cao của 3 hình chóp tam giác này đều bằng nhau và diện tích đáy là  $35 \text{ cm}^2$  .

Tính thể tích của hình khối bên .

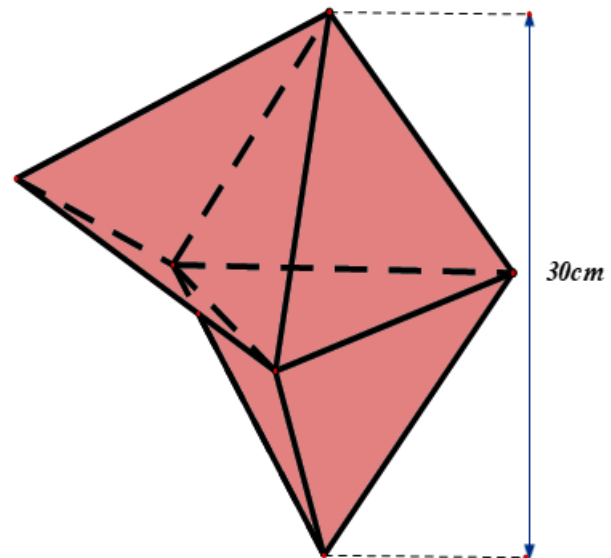
Lời giải:

Chiều cao của mỗi hình chóp tam giác đều là :

$$30 : 2 = 15 \text{ (cm)}.$$

Thể tích của hình khối bên là :

$$V = 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 35 \cdot 15 \right) = 35 \cdot 15 = 525 \text{ (cm}^3 \text{)}.$$

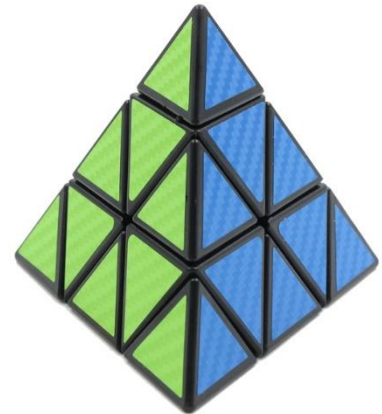


**Câu 18:**

Một khối rubik có dạng hình chóp tam giác đều ( các mặt khối rubik là các tam giác đều bằng nhau), có chu vi đáy bằng 234 mm, đường cao của mặt bên hình chóp là 67,5 mm .

a/ Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần ( tổng diện tích các mặt ) của khối rubik đó.

b/ Biết chiều cao của khối rubik là 63,7 mm. Tính thể tích của khối rubik đó.

**Lời giải:**

a/ Đường cao mặt bên hình chóp chính là trung đoạn  $d = 67,5$  mm.

Diện tích xung quanh của khối rubik đó là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 234 \cdot 67,5 = 7897,5 \text{ (cm}^2\text{)} .$$

Đáy là tam giác đều có cạnh là  $234 : 3 = 78$  cm; Chiều cao của tam giác đáy là 67,5cm.

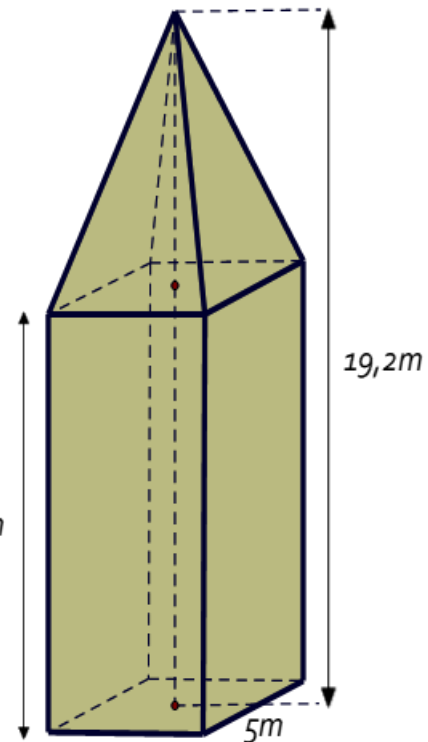
Diện tích toàn phần của khối rubik đó là :

$$S_{tp} = 7897,5 + \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot 67,5 = 10530 \text{ (cm}^2\text{)} .$$

b/ Thể tích của khối rubik đó là :  $V = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot 67,5 \right) \cdot 63,7 = 55896,75 \text{ (cm}^3\text{)} .$

**Câu 19:**

Tháp đồng hồ có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5m, chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp tứ giác đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh. Chiều cao của tháp đồng hồ là 19,2m.



a) Tính theo mét chiều cao của phần trên của tháp đồng hồ.

b) Cho biết thể tích của hình hộp chữ nhật được tính theo công thức  $V = S \cdot h$ , trong đó  $S$  là diện tích

mặt đáy,  $h$  là chiều cao của hình hộp chữ nhật. Thể tích của hình chóp được tính theo công thức  $\frac{1}{3}Sh$ , trong đó  $S$  là diện tích mặt đáy,  $h$  là chiều cao của hình chóp. Tính thể tích của tháp đồng hồ này .

**Lời giải**

a/ Chiều cao của phần trên của tháp đồng hồ là :  $19,2 - 12 = 7,2$  (m).

b/ Thể tích của phần trên của tháp là :  $V_1 = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.5^2.7,2 = 60m^3$

Thể tích của phần dưới của tháp là :  $V_2 = S.h = 5.5.12 = 300m^3$ .

Thể tích của tháp đồng hồ đó là :  $V = V_1 + V_2 = 60 + 300 = 360m^3$

**Câu 20:** Kim tự tháp Kheops – Ai Cập có dạng hình chóp đều, đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (*hình vẽ*). Chiều cao của kim tự tháp là 139 m, cạnh đáy của nó dài 230 m.



a/ Tính thể tích của kim tự tháp Kheops – Ai Cập (làm tròn đến hàng nghìn).

b/ Giả sử người ta muốn “*làm đẹp*” kim tự tháp bằng cách dùng gạch men phẳng để ốp phủ kín toàn bộ bề mặt kim tự tháp trên thì phải dùng tối thiểu bao nhiêu mét vuông gạch men ? Biết độ dài trung đoạn của kim tự tháp là 180m.

Lời giải

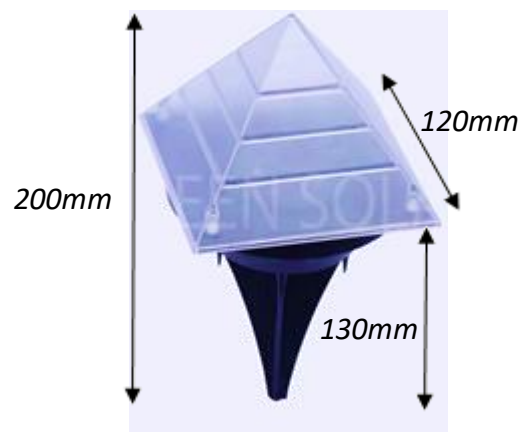
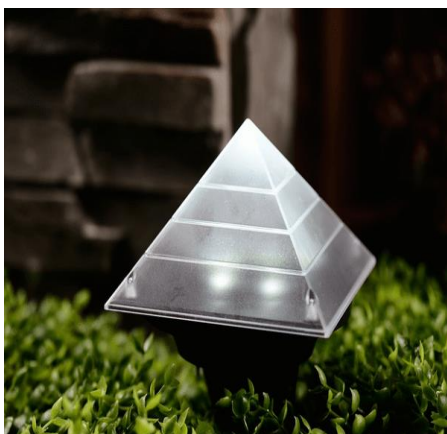
a/ Thể tích của kim tự tháp Kheops – Ai Cập là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (230)^2 \cdot 139 \approx 2451000(m^3)$$

b/ Người ta muốn “*làm đẹp*” kim tự tháp bằng cách dùng gạch men phẳng để ốp phủ kín toàn bộ bề mặt kim tự tháp trên thì phải dùng tối thiểu số mét vuông gạch men là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 230) \cdot 180 = 82800(m^2)$$

**Câu 21:** Đèn cắm đất hình kim tự tháp là một loại đèn được thiết kế bắt mắt giúp không gian nhà ở trở nên sang trọng và nổi bật hơn. Phần trên của đèn được thiết kế có dạng một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là 120mm; chiều cao của đèn cắm đất là 200 mm. Phần dưới của đèn cắm đất dài 130mm (*như hình vẽ minh họa bên dưới*). Tính thể tích phần trên của đèn cắm đất hình kim tự tháp đó.



Lời giải :

Chiều cao của phần trên của đèn là  $200 - 130 = 70$  (mm)  
 Thể tích phần trên của đèn cắm đất hình kim tự tháp đó là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (120)^2 \cdot 70 = 336000(\text{mm}^3)$$

**Câu 22:** Đèn để bàn hình kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 25cm, chiều cao của đèn để bàn dài 35cm.

a/ Tính thể tích của chiếc đèn để bàn hình kim tự tháp này.

b/ Bạn Kim định dán các mặt bên của đèn bằng tấm giấy màu. Tính diện tích giấy màu bạn Kim cần sử dụng (coi như mép dán không đáng kể), biết độ dài trung đoạn chiếc đèn hình chóp này là 37cm.

c/ Nếu mỗi mét vuông giấy màu là 120000 đồng. Hỏi bạn Kim cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu tiền để mua đủ giấy màu để dán được các mặt bên của chiếc đèn để bàn này ?

Lời giải :

a/ Thể tích của chiếc đèn để bàn hình kim tự tháp này là :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (25)^2 \cdot 35 = 7291,7(\text{cm}^3);$$

b/ Diện tích giấy màu bạn Kim cần sử dụng là :

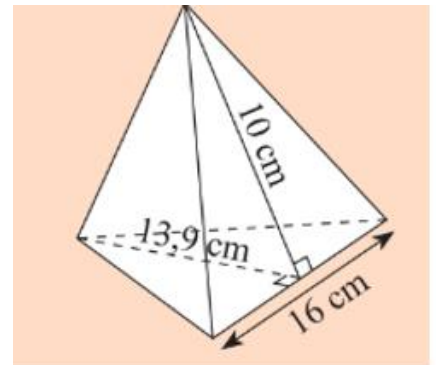
$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 25) \cdot 37 = 1850(\text{cm}^2) = 0,185 \text{ m}^2;$$

c/ Bạn Kim cần chuẩn bị ít nhất số tiền để mua đủ giấy màu để dán được các mặt bên của chiếc đèn để bàn này là :  $0,185 \cdot 120000 = 22200$  (đồng).



**Câu 23:**

Bạn Mai cần dán giấy bóng kính màu xung quanh một chiếc lồng đèn hình chóp tam giác đều với kích thước như hình bên. Hỏi diện tích giấy mà Mai cần là bao nhiêu?



Lời giải :

Diện tích giấy mà Mai cần dùng là diện tích tất cả các mặt hình tam giác của chiếc lồng đèn hình chóp tam giác đều.

Diện tích mặt đáy của chiếc lồng đèn đó

$$\text{là: } \frac{1}{2} \cdot 13,9 \cdot 16 = 111,2 (cm^2)$$

Diện tích một mặt bên của chiếc lồng đèn đó là:  $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 = 80 (cm^2)$

Diện tích ba mặt bên của chiếc lồng đèn đó là:  $3 \cdot 80 = 240 (cm^2)$ .

Diện tích giấy mà Mai cần là:  $111,2 + 240 = 351,2 (cm^2)$ .

**Câu 24:**

Bạn An đánh rơi một mô hình kim tử tháp có dạng là hình chóp tứ giác đều vào một hộp đựng đầy nước dạng hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có kích thước đáy là

$7 \times 5 \text{ cm}$  và chiều cao  $10 \text{ cm}$ ; còn hình chóp đều có chiều cao là  $5 \text{ cm}$  và cạnh đáy dài  $6 \text{ cm}$ . Hỏi khi vớt mô hình ra, lượng nước còn lại trong hộp là bao nhiêu ?

Lời giải :

Thể tích của hình hộp chữ nhật là :

$$7 \cdot 5 \cdot 10 = 350 (cm^3);$$

Thể tích của hình chóp tứ giác đều là :

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 5 = 60 (cm^3);$$

Khi vớt mô hình ra, lượng nước còn lại trong hộp là

$$350 - 60 = 290 (cm^3).$$

**Câu 25:**

Kim tự tháp Louvre là một công trình kiến trúc tuyệt đẹp bằng kính tọa lạc ngay lối vào của bảo tàng Louvre, Pari. Kim tự tháp có dạng là hình chóp tứ giác đều với chiều cao 21m và độ dài cạnh đáy là 34m. Các mặt bên của kim tự tháp là các tam giác đều (*xem hình ảnh minh họa bên*).



Hình 3.10.6.a: Kim tự tháp Louvre.



Hình 3.10.6.b: Một mặt của kim tự tháp.

- a/ Tính thể tích của kim tự tháp Louvre.
- b/ Tổng diện tích thật sự của sàn kim tự tháp là  $1000m^2$ . Hỏi nếu sử dụng loại gạch hình vuông có cạnh là 60cm để lát sàn thì cần bao nhiêu viên gạch ?
- c/ Mỗi mặt của Kim tự tháp (*trừ mặt có cổng ra vào*) được tạo thành từ 18 tấm kính hình tam giác đều và 17 hàng kính hình thoi xếp chồng lên nhau. Hỏi có bao nhiêu tấm kính hình thoi trên mỗi mặt ?

**Lời giải :**

a/ Thể tích kim tự tháp là :  $V = \frac{1}{3} \cdot 34^2 \cdot 21 = 8092(m^3)$

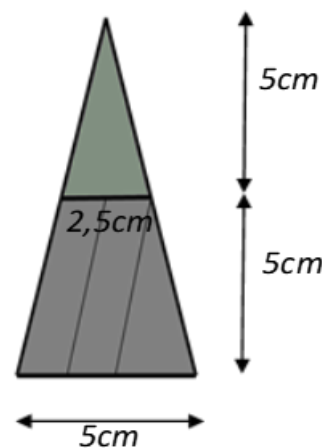
b/ Diện tích một viên gạch hình vuông :  $S = (0,6)^2 = 0,36(m^2)$

Số viên gạch hình vuông cần dùng là :  $\frac{1000}{0,36} \approx 2778$  (viên)

c/ Số tấm kính hình thoi trên mỗi mặt :  $\frac{17 \cdot (17+1)}{2} = 153$  (tấm)

**Câu 26:**

Hình ảnh bên là ảnh của một lọ nước hoa hình kim tự tháp. Khi đậy nắp, lọ có dạng hình chóp tứ giác đều (tính cả thân lọ và nắp lọ) trong đó nắp lọ cũng là hình chóp tứ giác đều có chiều cao 5cm, cạnh đáy 2,5cm. Chiều cao thân lọ và cạnh đáy lọ đều bằng chiều cao của nắp lọ. Bỏ qua độ dày của vỏ. Tính dung tích của lọ nước hoa đó ra đơn vị mi – li – lít (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết rằng :  $1cm^3 = 1ml$ .



Lời giải :

Thể tích của lọ nước hoa hình kim tự tháp là :

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 10 = \frac{250}{3} (cm^3)$$

Thể tích của nắp lọ nước hoa là :

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (2,5)^2 \cdot 5 = \frac{125}{12} (cm^3)$$

Dung tích của lọ nước hoa đó là

$$\frac{250}{3} - \frac{125}{12} \approx 73 (cm^3) = 73 ml$$

**Câu 27:**

Một tấm bìa như hình bên gấp thành hình chóp tam giác đều với các mặt đều là hình tam giác đều. Với số đo trên hình vẽ, hãy tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình này.

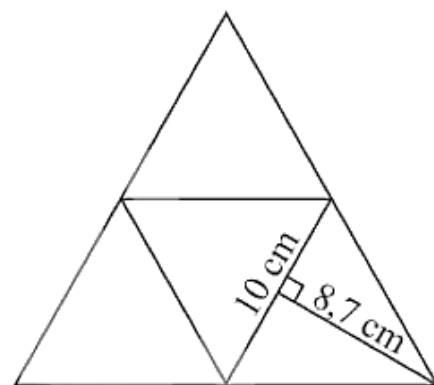
Lời giải :

Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều trên là:

$$S_{xq} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 10) \cdot 8,7 = 130,5 (cm^2)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều trên là:

$$S_{tp} = 130,5 + \frac{1}{2} \cdot 8,7 \cdot 10 = 174 (cm^2)$$



## ĐƠN THỨC NHIỀU BIẾN. ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

### A. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1:** Nhận biết các đơn thức nhiều biến, đa thức nhiều biến.

**Ví dụ 1.** Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

- a)  $12x^2y$ ;      b)  $x(y+1)$ ;      c)  $1-2x$ ;      d)  $18$ ;      e)  $\frac{5}{2x}$ .

Bài giải

$12x^2y$ ;  $18$  là đơn thức.

**Ví dụ 2.** Biểu thức nào dưới đây không phải là đơn thức?

- a)  $x^2 - y^2$ ;      b)  $x - y + xy$ ;      c)  $2x^2y$ ;      d)  $\frac{3}{4xy}$ ;      e)  $x(y+1)$ .

Bài giải

$x^2 - y^2$ ;  $x - y + xy$ ;  $x(y+1)$ ;  $\frac{3}{4xy}$  không phải là đơn thức.

**Ví dụ 3.** Cho biết phần hệ số, phần biến của mỗi đơn thức sau

- a)  $2x^2y$ ;      b)  $-\frac{1}{2}xy^3$ .

Bài giải

a)  $2x^2y$  : Hệ số là 2, phần biến là  $x^2y$ .

b)  $-\frac{1}{2}xy^3$  : Hệ số là  $-\frac{1}{2}$ , phần biến là  $xy^3$ .

**Ví dụ 4.** Biểu thức nào là đa thức trong các biểu thức sau?

- a)  $x^2y - 2 + 3xy^2$ ;      b)  $\frac{x}{y} - 2x^2$ ;      c)  $2018$ ;      d)  $x(x+y)$ .

Bài giải

$x^2y - 2 + 3xy^2$ ;  $2018$ ;  $x(x+y)$  là đa thức.

**Ví dụ 5.** Biểu thức nào không phải là đa thức trong các biểu thức sau?

- a)  $x - 2 + \frac{3}{x}$ ;      b)  $xy - 2x^2$ ;      c)  $x^2 - 4$ ;      d)  $\frac{x^2 + 1}{xy}$ .

Bài giải

$x - 2 + \frac{3}{x}$ ;  $\frac{x^2 + 1}{xy}$  không phải là đa thức.

**Dạng 2: Nhận biết các đơn thức đồng dạng**

**Ví dụ 1.** Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng

$$\frac{3}{2}xy; -\frac{1}{3}x^2z; \frac{3}{4}xyz; \frac{5}{6}xy; 7xyz; \frac{5}{6}x^2z; -3xy.$$

Bài giải

Nhóm các đơn thức đồng dạng là :

Nhóm 1 :  $\frac{3}{2}xy; \frac{5}{6}xy; -3xy$ .      Nhóm 2:  $\frac{3}{4}xyz; 7xyz$ .      Nhóm 3:  $-\frac{1}{3}x^2z; \frac{5}{6}x^2z$

**Ví dụ 2.** Trong các đơn thức sau, đơn thức nào đồng dạng với đơn thức  $-3x^2yz$  ?

- a)  $-3xyz$ ;      b)  $\frac{2}{3}x^2yz$ ;      c)  $\frac{3}{2}yzx^2$ ;      d)  $4x^2y$ .

Bài giải

$\frac{2}{3}x^2yz$  đồng dạng với đơn thức  $-3x^2yz$ .

Câu b đúng .

**Dạng 3: Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng**

**Ví dụ 1.** Tính tổng, hiệu các biểu thức sau

- a)  $3xy^2 + \frac{1}{3}xy^2$ ;      b)  $2x^2y^2 + 3x^2y^2 + x^2y^2$ ;  
c)  $3x^2yz^2 - 4x^2yz^2$ ;      d)  $2x^2y + \frac{2}{3}x^2y + \left(-\frac{1}{3}\right)x^2y$ .

Bài giải

a)  $3xy^2 + \frac{1}{3}xy^2 = \left(3 + \frac{1}{3}\right)xy^2 = \frac{10}{3}xy^2$

b)  $2x^2y^2 + 3x^2y^2 + x^2y^2 = (2 + 3 + 1)x^2y^2 = 6x^2y^2$

c)  $3x^2yz^2 - 4x^2yz^2 = (3 - 4)x^2yz^2 = -x^2yz^2$

d)  $2x^2y + \frac{2}{3}x^2y + \left(-\frac{1}{3}\right)x^2y = \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)x^2y = \frac{7}{3}x^2y$

**Ví dụ 2.** Tính giá trị biểu thức  $P = 2011x^2y + 12x^2y - 2015x^2y$  tại  $x = -1$ ;  $y = 2$ .

Bài giải

$$P = 2011x^2y + 12x^2y - 2015x^2y = (2011 + 12 - 2015)x^2y = 8x^2y.$$

Thay  $x = -1$ ;  $y = 2$  vào  $8x^2y$  ta được :  $8x^2y = 8 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 8 \cdot 1 \cdot 2 = 16$

**Dạng 4: Tìm đơn thức thỏa mãn đẳng thức**

**Dùng quy tắc chuyển vế giống như đối với với số.**

- Nếu  $M + B = A$  thì  $M = A - B$ .
- Nếu  $M - B = A$  thì  $M = A + B$ .
- Nếu  $B - M = A$  thì  $M = B - A$ .

**Ví dụ 1.** Xác định đơn thức  $M$  để

a)  $2x^4y^3 + M = -3x^4y^3$ ;

b)  $2x^3y^3 - M = 4x^3y^3$ .

Bài giải

a)  $2x^4y^3 + M = -3x^4y^3$

b)  $2x^3y^3 - M = 4x^3y^3$ .

$$M = -3x^4y^3 - 2x^4y^3$$

$$M = 2x^3y^3 - 4x^3y^3$$

$$M = (-3 - 2)x^4y^3$$

$$M = (2 - 4)x^3y^3$$

$$M = -5x^4y^3$$

$$M = -2x^3y^3$$

**Dạng 5: Tính giá trị của đa thức**

- Thay giá trị của biến vào đa thức rồi thực hiện phép tính.

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của đa thức sau:

a)  $4x^2y^2 + xy$  tại  $x = -2$ ,  $y = \frac{1}{2}$ ;

b)  $-\frac{1}{2}x^2y^3 + x$  tại  $x = 3$ ,  $y = -2$ .

Bài giải

a)  $4x^2y^2 + xy$  tại  $x = -2, y = \frac{1}{2}$ .

Thay  $x = -2, y = \frac{1}{2}$  vào  $4x^2y^2 + xy$  ta được :  $4 \cdot (-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2) \cdot \frac{1}{2} = 16 \cdot \frac{1}{4} + (-1) = 4 - 1 = 3$ .

b)  $-\frac{1}{2}x^2y^3 + x$  tại  $x = 3, y = -2$ .

Thay  $x = 3, y = -2$  vào  $-\frac{1}{2}x^2y^3 + x$  ta được :

$$-\frac{1}{2} \cdot (3)^2 \cdot (-2)^3 + 3 = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (-8) + 3 = \frac{72}{2} + 3 = \frac{78}{2} = 39$$

### Dạng 6: Thu gọn đa thức

- **Bước 1:** Nhóm các hạng tử đồng dạng với nhau;
- **Bước 2:** Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng trong từng nhóm.

**Ví dụ 1.** Thu gọn các đa thức sau

a)  $A = -x^2y - 2xy + 2x^2y + 5xy + 2$ ;                      b)  $B = -2xy + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + xy$ ;

c)  $C = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2$ ;    d)  $D = xy^2z + 2xy^2z - xyz - 3xy^2z + xy^2z$ .

#### Bài giải

a)

$$\begin{aligned} A &= -x^2y - 2xy + 2x^2y + 5xy + 2 = [(-x^2y) + 2x^2y] + [(-2xy) + 5xy] + 2 \\ &= [(-1 + 2)x^2y] + [(-2 + 5)xy] + 2 = x^2y + 3xy + 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= -2xy + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + xy = \left(\frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right) + [(-2xy) + xy] \\ &= \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)xy^2\right] + [(-2 + 1)xy] = 2xy^2 - xy \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2 \\ &= (x^2 + x^2) + (y^2 - y^2 + y^2) + (z^2 + z^2 - z^2) \\ &= 2x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= xy^2z + 2xy^2z - xyz - 3xy^2z + xy^2z \\ &= (xy^2z + 2xy^2z - 3xy^2z + xy^2z) - xyz \\ &= xy^2z - xyz \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Thu gọn các đa thức sau :

a)  $A = 2x^2yz + xy - x^2yz + 4xy + 6$ ;                      b)  $B = 4xy + \frac{1}{2}x^2y - xy + \frac{3}{2}x^2y$ ;

c)  $C = x^2 - y^2 + z^2 - x^2 + y^2 - z^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ;    d)  $D = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$ .

e)  $E = 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3$ .

Bài giải

a)

$$\begin{aligned} A &= 2x^2yz + xy - x^2yz + 4xy + 6 \\ &= (2x^2yz - x^2yz) + (xy + 4xy) + 6 \\ &= x^2yz + 5xy + 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= 4xy + \frac{1}{2}x^2y - xy + \frac{3}{2}x^2y \\ &= (4xy - xy) + \left(\frac{1}{2}x^2y + \frac{3}{2}x^2y\right) \\ &= 3xy + 2x^2y \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= x^2 - y^2 + z^2 - x^2 + y^2 - z^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (x^2 - x^2 + x^2) + (-y^2 + y^2 + y^2) + (z^2 - z^2 + z^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz \\ &= (2x^2yz - 5x^2yz) + (4xy^2z + xy^2z) - xyz \\ &= -3x^2yz + 5xy^2z - xyz \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} E &= 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3 \\ &= (2x^2y^3 - x^2y^3) + (3x^4 + 6x^4) - 7x^2 \\ &= x^2y^3 + 9x^4 - 7x^2 \end{aligned}$$



**B. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

a)  $2 + xy$ ;  $3xy^2z$ ;  $3\frac{1}{2}$ ;  $\left(1 - \frac{3}{2}\right)x^2y^2$ ;  $\frac{10x}{3y}$ .    b)  $\frac{4}{3}x^2yz$ ;  $2018$ ;  $\frac{xy^2}{3}$ ;  $\frac{2xy}{z}$ ;  $x + y$ .

Bài giải

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Biểu thức nào là đa thức trong các biểu thức sau?

a)  $2x^2y + 3 + xy$ ;    b)  $\frac{2}{x + y}$ ;    c)  $x(x + 2y)$ ;    d)  $2 - \frac{x + 1}{x - 1}$ .

Bài giải

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng

$-8x^2yz$ ;  $3xy^2z$ ;  $\frac{1}{3}x^2yz$ ;  $5x^2y^2z$ ;  $-\frac{2}{3}xy^2z$ ;  $-\frac{5}{7}x^2y^2z$ .

Bài giải

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 4.** Thu gọn mỗi đơn thức sau:

a)  $2x^2y \cdot 3xy^2$ ;    b)  $2xy \cdot \frac{4}{5}x^2y^3 \cdot 10xyz$ ;    c)  $-10y^2 \cdot (2xy)^3 \cdot (-x)^2$ .

d)  $2xy^2 \cdot \frac{4}{3}x^2y^3 \cdot 6x$ ;                  e)  $\frac{4}{3}x^2y^2z^2 \cdot \frac{3}{4}xyz$ ;

f)  $-4a^2x \cdot (-2bxy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$  với  $a, b$  là hằng số.

Bài giải

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Bài 5.** Thu gọn các đa thức sau

a)  $A = -2xy + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + xy$ ;

b)  $B = xy^2z + 2xy^2z - xyz - 3xy^2z + xy^2z$ .

c)  $C = 4x^2y^3 + x^4 - 2x^2 + 6x^4 - x^2y^3$ .

d)  $D = \frac{3}{4}xy^2 - 2xy - \frac{1}{2}xy^2 + 3xy$ ;

e)  $E = 2x^2 - 3y^3 - z^4 - 4x^2 + 2y^3 + 3z^4$ ;

f)  $F = 3xy^2z + xy^2z - xyz + 2xy^2z - 3xyz$ .

Bài giải

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Bài 6.** Tính giá trị mỗi đa thức sau :

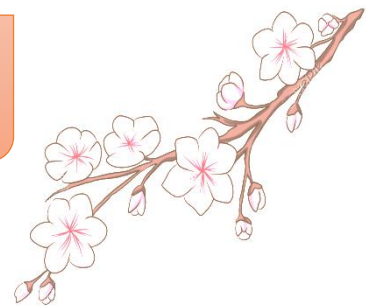
a)  $A = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3$ ; tại  $x = 2$ ;  $y = \frac{1}{2}$

b)  $B = x^6 + 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^5 - x^6$ ; tại  $x = 0$ ;  $y = \frac{1}{4}$

c)  $C = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6$ ; tại  $x = 2$ ;  $y = 1$

Bài giải

## CÁC PHÉP TÍNH VỚI ĐA THỨC NHIỀU BIẾN



### A. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

**Dạng 1:** Tính tổng (hay hiệu) đa thức nhiều biến.

**Ví dụ 1.** Tính tổng  $A + B$  và hiệu  $A - B$  của hai đa thức  $A, B$  trong các trường hợp sau:

a)  $A = x + 2y$  và  $B = x - 2y$ .

b)  $A = 2x^2y - x^3 - xy^2 + 1$  và  $B = x^3 + 2xy^2 - 2$ .

c)  $A = x^2 - 2yz + z^2$  và  $B = 3yz + 5x^2 - z^2$ .

d)  $A = \frac{1}{2}x^2y + xy^3 - \frac{5}{2}x^3y^2 + x^3$  và  $B = \frac{7}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y + xy^3$ .

Bài giải

a)  $A + B = (x + 2y) + (x - 2y) = x + 2y + x - 2y = (x + x) + (2y - 2y) = 2x$

$$A - B = (x + 2y) - (x - 2y) = x + 2y - x + 2y = (x - x) + (2y + 2y) = 4y$$

b)

$$\begin{aligned} A + B &= (2x^2y - x^3 - xy^2 + 1) + (x^3 + 2xy^2 - 2) \\ &= 2x^2y - x^3 - xy^2 + 1 + x^3 + 2xy^2 - 2 = 2x^2y + [(-xy^2) + 2xy^2] + [(-x^3) + x^3] + (1 - 2) \\ &= 2x^2y + xy^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (2x^2y - x^3 - xy^2 + 1) - (x^3 + 2xy^2 - 2) \\ &= 2x^2y - x^3 - xy^2 + 1 - x^3 - 2xy^2 + 2 = 2x^2y + [(-xy^2) - 2xy^2] + [(-x^3) - x^3] + (1 + 2) \\ &= 2x^2y - 3xy^2 - 2x^3 + 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A + B &= (x^2 - 2yz + z^2) + (3yz + 5x^2 - z^2) = x^2 - 2yz + z^2 + 3yz + 5x^2 - z^2 \\ &= (x^2 + 5x^2) + [(-2yz) + 3yz] + (z^2 - z^2) = 6x^2 + yz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (x^2 - 2yz + z^2) - (3yz + 5x^2 - z^2) = x^2 - 2yz + z^2 - 3yz - 5x^2 + z^2 \\ &= (x^2 - 5x^2) + [(-2yz) - 3yz] + (z^2 + z^2) = -4x^2 - 5yz + 2z^2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 A + B &= \left( \frac{1}{2}x^2y + xy^3 - \frac{5}{2}x^3y^2 + x^3 \right) + \left( \frac{7}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y + xy^3 \right) \\
 &= \frac{1}{2}x^2y + xy^3 - \frac{5}{2}x^3y^2 + x^3 + \frac{7}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y + xy^3 \\
 &= \left[ \left( -\frac{5}{2}x^3y^2 \right) + \frac{7}{2}x^3y^2 \right] + (xy^3 + xy^3) + \left( \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2y \right) + x^3 \\
 &= x^3y^2 + 2xy^3 + x^3 \\
 A - B &= \left( \frac{1}{2}x^2y + xy^3 - \frac{5}{2}x^3y^2 + x^3 \right) - \left( \frac{7}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y + xy^3 \right) \\
 &= \frac{1}{2}x^2y + xy^3 - \frac{5}{2}x^3y^2 + x^3 - \frac{7}{2}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^2y - xy^3 \\
 &= \left[ \left( -\frac{5}{2}x^3y^2 \right) - \frac{7}{2}x^3y^2 \right] + (xy^3 - xy^3) + \left( \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y \right) + x^3 \\
 &= -6x^3y^2 + x^2y + x^3
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Thực hiện phép tính sau:

$$A = (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + 2xy + y^2).$$

$$B = \left( \frac{1}{2}xy - 3xy^2 \right) + (2xy^2 + 3xy) - \frac{1}{2}xy.$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned}
 A &= (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + 2xy + y^2) = x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + 2xy + y^2 \\
 &= (x^2 + x^2) + (y^2 + y^2) + [(-2xy) + 2xy] = 2x^2 + 2y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \left( \frac{1}{2}xy - 3xy^2 \right) + (2xy^2 + 3xy) - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}xy - 3xy^2 + 2xy^2 + 3xy - \frac{1}{2}xy \\
 &= \left( \frac{1}{2}xy + 3xy \right) + [(-3xy^2) + 2xy^2] - \frac{1}{2}xy = \frac{7}{2}xy - xy^2 - \frac{1}{2}xy
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.**

Cho các đa thức  $M = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3$ ;  $N = x^2y - 2xy - 2$  và  $P = 3x^3 - 2x^2y - xy + 3$ . Tính:

a)  $M + N$ .                      b)  $M - P$ .                      c)  $M - 2P$ .                      d)  $M + N + P$ .

**Bài giải**

a/

$$M + N = (3x^3 - x^2y + 2xy + 3) + (x^2y - 2xy - 2) = [(-x^2y) + (x^2y)] + (2xy - 2xy) + 3x^3 + (3 - 2) = 3x^3 + 1$$

b/

$$M - P = (3x^3 - x^2y + 2xy + 3) - (3x^3 - 2x^2y - xy + 3) = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 - 3x^3 + 2x^2y + xy - 3 = (3x^3 - 3x^3) + [(-x^2y) + 2x^2y] + (2xy + xy) + (3 - 3) = x^2y + 3xy$$

c/

$$M - 2P = (3x^3 - x^2y + 2xy + 3) + 2(3x^3 - 2x^2y - xy + 3) = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 + 6x^3 - 4x^2y - 2xy + 6 = (3x^3 + 6x^3) + [(-x^2y) - 4x^2y] + (2xy - 2xy) + (3 + 6) = 9x^3 - 5x^2y + 9$$

d/

$$M = (3x^3 - x^2y + 2xy + 3) + (x^2y - 2xy - 2) + (3x^3 - 2x^2y - xy + 3) = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 + x^2y - 2xy - 2 + 3x^3 - 2x^2y - xy + 3 = (3x^3 + 3x^3) + [(-x^2y) + x^2y - 2x^2y] + (2xy - 2xy - xy) + (3 - 2 + 3) = 6x^3 - 2x^2y - xy + 4$$

**Dạng 2: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước**

**Ví dụ 4.** Tìm đa thức  $A, B$  biết:

a)  $A + x^2 - y^2 = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2.$       b)  $B - (5x^2 - 2xyz) = 2x^2 + 2xyz + 1.$

**Bài giải**

a/

$$A + x^2 - y^2 = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2$$

$$A = (x^2 - 2y^2 + 3xy - 2) - (x^2 - y^2) = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2 - x^2 - y^2 = (x^2 - x^2) + [(-2y^2) - y^2] + 3xy - 2 = -3y^2 + 3xy - 2$$

b/

$$B - (5x^2 - 2xyz) = 2x^2 + 2xyz + 1$$

$$B = (2x^2 + 2xyz + 1) + (5x^2 - 2xyz) = 2x^2 + 2xyz + 1 + 5x^2 - 2xyz = (2x^2 + 5x^2) + (2xyz - 2xyz) + 1 = 7x^2 + 1$$

**Ví dụ 5.** Cho các đa thức  $A = 4x^2 + 3y^2 - 5xy$ ;  $B = 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2$ . Tìm đa thức  $C$  sao cho:

a)  $C = A + B$ .

b)  $C + A = B$ .

Bài giải

a/

$$\begin{aligned} C &= A + B = (4x^2 + 3y^2 - 5xy) + (3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2) \\ &= 2x^2y^2 - 5xy + (4x^2 + 3x^2) + (3y^2 + 2y^2) = 2x^2y^2 - 5xy + 7x^2 + 5y^2 \end{aligned}$$

b/

$$\begin{aligned} C &= B - A = (3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2) - (4x^2 + 3y^2 - 5xy) \\ &= 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - 4x^2 - 3y^2 + 5xy = 2x^2y^2 + 5xy + (3x^2 - 4x^2) + (2y^2 - 3y^2) \\ &= 2x^2y^2 + 5xy - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

**Dạng 3: Thực hiện phép tính nhân đơn thức với đa thức**

- Quy tắc:  $A(B + C) = AB + AC$  (với  $A, B, C$  là các đơn thức).

**Ví dụ 6.** Làm tính nhân

a)  $M = (2x^3y) \cdot (x^2 - 2y + 1)$       b)  $N = (2xy^3 - 4y - 8x) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)$       c)  $P = x^2y \cdot \left(xy^2 - x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)$

Bài giải

a/

$$M = (2x^3y) \cdot (x^2 - 2y + 1) = 2x^3y \cdot x^2 + 2x^3y \cdot (-2y) + 2x^3y \cdot 1 = 2x^5y - 4x^3y^2 + 2x^3y$$

b/

$$N = (2xy^3 - 4y - 8x) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) = 2xy^3 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) + (-4y) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) + (-8x) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) = xy^4 - 2y^2 - 4xy$$

c/

$$P = x^2y \cdot \left(xy^2 - x^2 - \frac{1}{2}y^3\right) = x^2y \cdot (xy^2) + x^2y \cdot (-x^2) + x^2y \cdot \left(-\frac{1}{2}y^3\right) = x^3y^3 - x^4y - \frac{1}{2}x^2y^4$$

**Ví dụ 7.** Nhân đơn thức  $A$  với đa thức  $B$  biết rằng  $A = \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2$  và  $B = 4x^2 + 4xy^2 - 3$ .

**Bài giải**

$$\begin{aligned} A.B &= \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 \cdot (4x^2 + 4xy^2 - 3) = \left(\frac{1}{4}x^4y^2\right) \cdot (4x^2 + 4xy^2 - 3) \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4y^2\right) \cdot 4x^2 + \left(\frac{1}{4}x^4y^2\right) \cdot 4xy^2 + \left(\frac{1}{4}x^4y^2\right) \cdot (-3) = x^6y^2 + x^5y^4 - \frac{3}{4}x^4y^2 \end{aligned}$$

#### **Dạng 4: Thực hiện phép tính nhân đa thức với đa thức**

- Sử dụng quy tắc:  $(A + B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$

**Ví dụ 8.** Thực hiện phép nhân

a)  $(x + y)(x^2y - x)$ ;      b)  $(x + 2y)(x^2 - 2y + 4z)$ ;      c)  $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$ .

**Bài giải**

a/  $(x + y)(x^2y - x) = x \cdot x^2y + x \cdot (-x) + y \cdot x^2y + y \cdot (-x) = x^3y - x^2 + x^2y^2 - xy$

b/  $(x + 2y)(x^2 - 2y + 4z) = xx^2 + x \cdot (-2y) + x \cdot 4z + 2y \cdot x^2 + 2y \cdot (-y) + 2y \cdot 4z$   
 $= x^3 - 2xy + 4xz + 2x^2y - 2y^2 + 8yz$

**Ví dụ 9.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

a)  $M = \left(2x - \frac{1}{2}y\right)\left(2x + \frac{1}{2}y\right)$  tại  $x = \frac{-1}{2}$  và  $y = 4$

b)  $N = (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$  tại  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 2$ .

**Bài giải:**

a/

$$\begin{aligned} M &= \left(2x - \frac{1}{2}y\right)\left(2x + \frac{1}{2}y\right) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot \frac{1}{2}y + \left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot 2x + \left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{2}y \\ &= 4x^2 + xy - xy - \frac{1}{4}y^2 = 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

Thay  $x = \frac{-1}{2}$  và  $y = 4$  vào  $4x^2 - \frac{1}{4}y^2$  ta được :  $4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 1 - 4 = -3$



b/

$$\begin{aligned} N &= (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4) \\ &= 2x \cdot 4x^2 + 2x \cdot 2xy^2 + 2x \cdot y^4 + (-y^2) \cdot 4x^2 + (-y^2) \cdot 2xy^2 + (-y^2) \cdot y^4 \\ &= 8x^3 + 4x^2y^2 + 2xy^4 - 4x^2y^2 - 2xy^4 - y^6 = 8x^3 - y^6 \end{aligned}$$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 2$  vào  $8x^3 - y^6$  ta được :  $8x^3 - y^6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2^6 = 1 - 64 = -63$

**Dạng 5: Thực hiện phép tính chia đơn thức với đa thức**

**Ví dụ 10:** Làm phép tính chia:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| a) $x^5 : x^3$ .                              | b) $18x^7 : 6x^4$ .           |
| c) $8x^6y^7z^2 : 4x^4y^7$ .                   | d) $65x^9y^5 : (-13x^4y^4)$ . |
| e) $\frac{27}{15}x^3yz^5 : \frac{9}{5}xz^2$ . |                               |

**Bài giải:**

- |   |  |
|---|--|
| a) $x^5 : x^3 = x^2$ .                                  | b) $18x^7 : 6x^4 = 3x^3$ .             |
| c) $8x^6y^7z^2 : 4x^4y^7 = 2x^2z^2$ .                   | d) $65x^9y^5 : (-13x^4y^4) = -5x^5y$ . |
| e) $\frac{27}{15}x^3yz^5 : \frac{9}{5}xz^2 = x^2yz^2$ . |  |

**Dạng 6: Thực hiện phép tính chia đa thức với đa thức**

**Ví dụ 11:** Làm phép tính chia:

- |                             |  |   |
|-----------------------------|--|---|
| a) $(x^3 + 12x^2 - 5x) : x$ | b) $(3x^4y^3 - 9x^2y^2 + 15xy^3) : xy^2$ | c) $\left(5x^5y^4z + \frac{1}{2}x^4y^2z^3 - 2xy^3z^2\right) : \frac{1}{4}xy^2z$ |
|-----------------------------|--|---|

**Bài giải:**

- |  |
|--|
| a) $(x^3 + 12x^2 - 5x) : x = x^2 + 12x - 5$ .  |
| b) $(3x^4y^3 - 9x^2y^2 + 15xy^3) : xy^2 = 3x^3y - 9x + 15y$  |
| c) $\left(5x^5y^4z + \frac{1}{2}x^4y^2z^3 - 2xy^3z^2\right) : \frac{1}{4}xy^2z = 20x^4y^2 + 2x^3z^2 - 8yz$ |

**B. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1:** Tính tổng các đa thức

a)  $A = x^2y + x^3 - xy^2 + 3$  và  $B = x^3 + xy^2 - xy - 6$ .

b)  $C = \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) - a + 2b$  ; và  $D = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b\right) - a - b$  .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 2:** Cho hai đa thức:  $M = 3xyz - 3x^2 + 5xy - 1$ ; và  $N = 5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y$ .

Tính  $M - N$ ;  $N - M$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 3:** Cho các đa thức :  $A = 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2$ ;  $B = -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2$   
 $C = x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2$

Hãy tính:

a)  $A - B - C$

b)  $B + A - C$

c)  $C - A - B$

**Bài 4:** Cho đa thức  $M = ax^2 + by^2 + cxy$  ( $x, y$  là biến). Tìm  $a, b, c$  biết:

Khi  $x = 0, y = 1$  thì  $M = -3$ . Khi  $x = -2, y = 0$  thì  $M = 8$ . Khi  $x = 1, y = -1$  thì  $M = 0$ .

**Bài 5:** Tìm đa thức M biết:

a)  $6x^2 - 3xy^2 + M = x^2 + y^2 - 2xy^2$ ;

b)  $M - 2xy - 4y^2 = 5xy + x^2 - 7y^2$ .

**Bài 6:** Thực hiện phép tính

- a)  $2x^2y^2 \left( x^3y^2 - x^2y^3 - \frac{1}{2}y^5 \right)$       b)  $-\frac{1}{3}xy(3x^3y^2 - 6x^2 + y^2)$       c)  $\left( -2xy^2 + \frac{2}{3}y^2 + 4xy^2 \right) \cdot \frac{3}{2}xy$ .
- d)  $x^2 + 2xy - 3(-xy)$       e)  $\frac{1}{2}x^2y \left( 2x^3 - \frac{2}{5}xy^2 - 1 \right)$       f)  $(-xy^2)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 7:** Rút gọn các biểu thức sau

- a)  $A = x^2(x - y^2) - xy(1 - yx) - x^3$
- b)  $B = x(x + 3y + 1) - 2y(x - 1) - (y + x + 1)x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 8:** Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức

- a)  $P = x(x^2 - y) + y(x - y^2)$  tại  $x = -\frac{1}{2}$  và  $y = -\frac{1}{2}$ ;
- b)  $Q = x^2(y^3 - xy^2) + (-y + x + 1)x^2y^2$  tại  $x = -10$  và  $y = -10$ .

.....

.....

.....

**Bài 9:** Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến  $x$

a)  $P = x(3x + 2) - x(x^2 + 3x) + x^3 - 2x + 3$ ;

b)  $Q = x(2x - 3) + 6x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) + 1$ .

**Bài 10:** Nhân các đa thức sau

a)  $(2xy + 3)(x - 2y)$ ;      b)  $(xy + 2y)(x^2y - 2xy + 4)$ ;      c)  $4\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 11:** Chứng minh rằng với mọi  $x, y$  ta luôn có

$$(xy + 1)(x^2y^2 - xy + 1) + (x^3 - 1)(1 - y^3) = x^3 + y^3.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 12:** Cho biểu thức  $Q = (2n - 1)(2n + 3) - (4n - 5)(n + 1) + 3$ . Chứng minh  $Q$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $n$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 13:** Làm tính chia:

a)  $(x^8y^8 + 2x^5y^5 + 7x^3y^3) : (-x^2y^2);$

b)  $\left(2x^5y^3 - 5x^3y^5 + \frac{3}{4}x^3y^3\right) : \frac{2}{3}xy;$

c)  $(9x^2y^4z - 12x^3y^2z^4 - 4xy^3z^2) : xyz.$

**Bài 14:** Tính giá trị biểu thức:

a)  $A = (15x^5y^3 - 10x^3y^2 + 20x^4y^4) : 5x^2y^2$  tại  $x = -1; y = 2.$

b)  $B = \left[(2x^2y)^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^2\right] : (xy)^2$  tại  $x = y = -2.$

c)  $C = (-2x^2y^2 + 4xy - 6xy^3) : \frac{2}{3}xy$  tại  $x = \frac{1}{2}; y = 4.$

d)  $D = \left(\frac{1}{3}x^2y^5 - \frac{2}{3}x^5y^2\right) : 2x^2y^2$  tại  $x = -3; y = 3.$



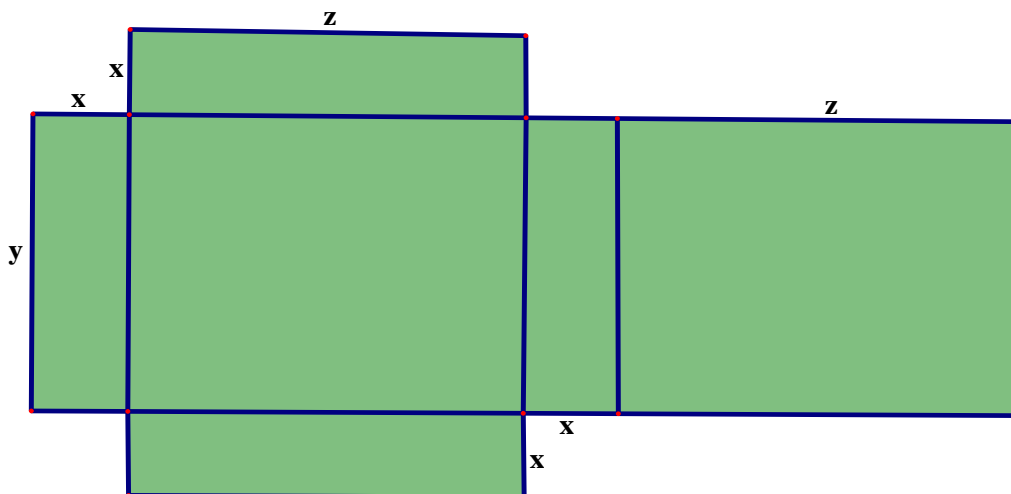
e)  $E = (20x^5y^4 + 10x^3y^2 - 5x^2y^3) : 5x^2y$  tại  $x = 1; y = -1$ .

f)  $G = (7x^5y^4z^3 - 3x^4yz^2 + 2x^2y^2z) : x^2yz$  tại  $x = -1; y = 1; z = 2$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Bài 15:**

Hình ảnh bên dưới mô tả cách có thể làm để có một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là  $x; y; z$  (cm). Các kích thước và tỉ lệ của hộp phụ thuộc vào các giá trị của  $x; y; z$ . Tính diện tích của các mặt của hình hộp chữ nhật được thể hiện qua hình đó.



.....

.....

.....

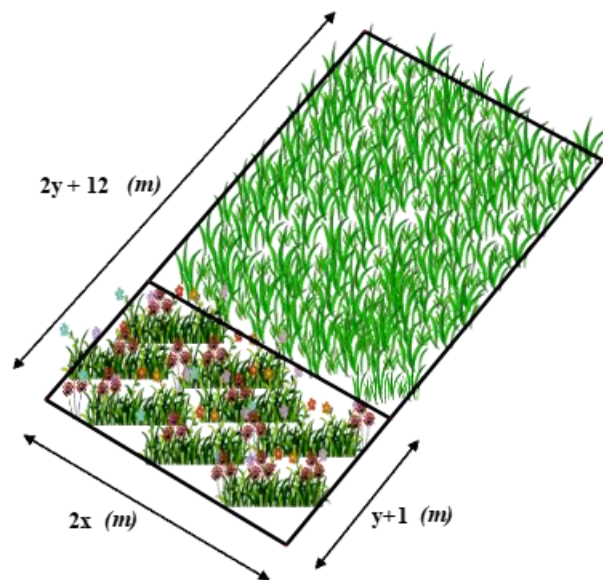
.....

.....

**Bài 16:**

Bác Nam có một mảnh vườn hình chữ nhật. Bác chia mảnh vườn này ra làm hai khu đất hình chữ nhật: Khu thứ nhất dùng để trồng cỏ. Khu thứ hai dùng để trồng hoa. (Với các kích thước có trong hình vẽ).

- a/ Tính diện tích khu đất dùng để trồng hoa theo  $x, y$ .
- b/ Tính diện tích khu đất dùng để trồng cỏ theo  $x, y$ .
- c/ Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật của bác Nam với  $x = 4$  và  $y = 4$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

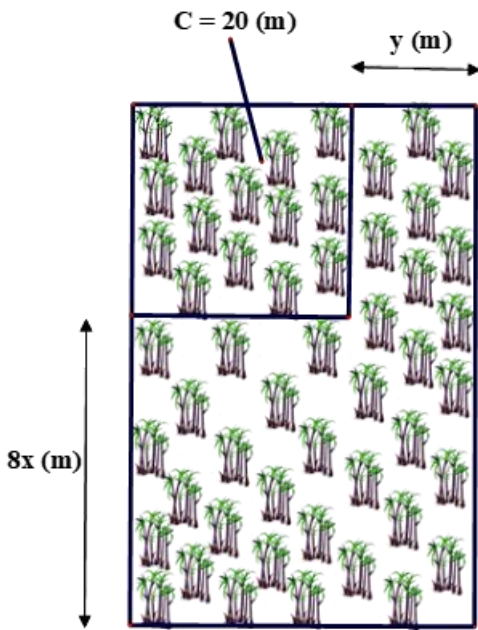
**Bài 17:**

Khu vườn trồng mía của nhà bác Minh ban đầu có một hình vuông biết chu vi hình vuông là **20 (m)** đó được mở rộng bên phải thêm **y (m)**, phía dưới **10x (m)** nên mảnh vườn trở thành một hình chữ (hình vẽ bên)

a/ Tính diện tích khu vườn bác Minh sau khi được mở rộng theo x, y.

b/ Tính diện tích khu vườn bác Minh sau khi được mở rộng khi

**x = 1 ; y = 2**



dạng  
sau  
thêm  
nhật  
  
mở  
  
mở

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 18:**

Một cửa hàng buổi sáng bán được  $xy$  bao gạo thì cửa hàng đó thu được số tiền là  $x^6y^5 - x^5y^4$  nghìn đồng.

a/ Tính số tiền mỗi bao gạo mà của cửa hàng đó đã bán theo  $x, y$ .

b/ Tính số tiền mỗi bao gạo mà của cửa hàng đó đã bán khi  $x = 2; y = 2$ .



.....

.....

.....

.....

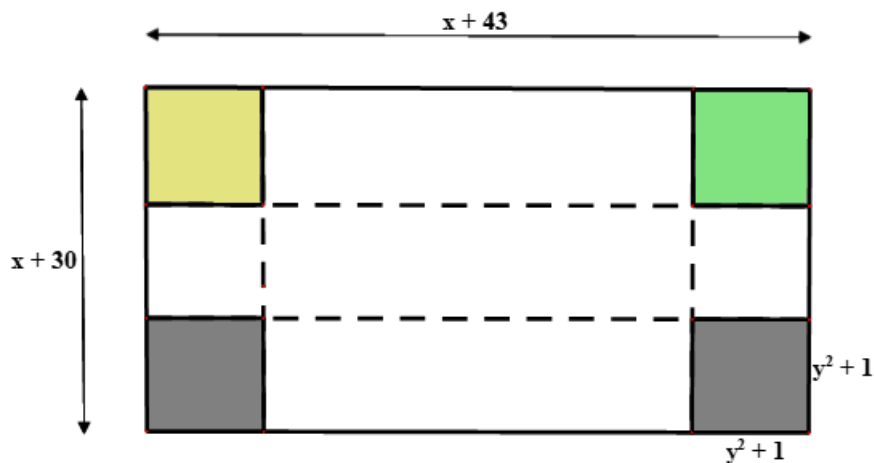
.....

**Bài 19:**

Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có chiều dài là  $x + 43$  (cm) và chiều rộng là  $x + 30$  (cm). Người ta cắt ở mỗi góc của tấm bìa một hình vuông cạnh  $y^2 + 1$  (cm) (phần tô màu) và xếp phần còn lại thành một cái hộp không nắp.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật trên theo  $x; y$ .

b/ Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật trên với  $x = 16; y = 4$ .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# TỨ GIÁC

## A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

▪ Tứ giác ABCD :

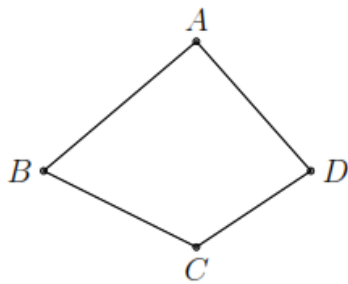
🔗 Hai cạnh kề nhau (chẳng hạn : AB; BC) không cùng thuộc một đường thẳng.

🔗 Không có ba đỉnh nào thẳng hàng

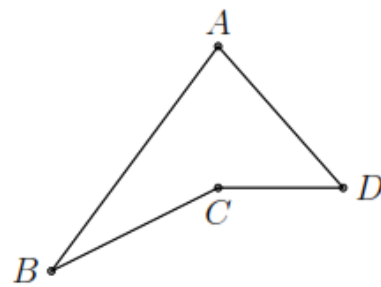
🔗 Có thể đọc góc theo tên đỉnh, chẳng hạn góc ABC còn gọi là góc B và góc đó còn gọi là góc trong của tứ giác.

✳️ Tứ giác có 4 cạnh, 2 đường chéo, 4 đỉnh và 4 góc

▪ *Tứ giác lồi*: Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về cùng một phía của đường thẳng chứa bất kỳ một cạnh nào của tứ giác đó. Chẳng hạn, hình 1.1 là tứ giác lồi; hình 1.2 không phải là tứ giác lồi.

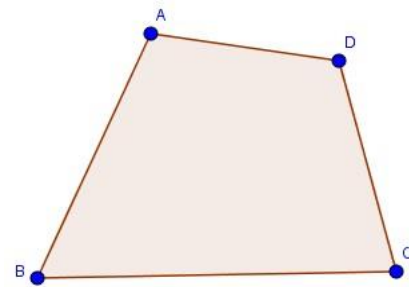


Hình 1.1



Hình 1.2

▪ *Tổng các góc trong một tứ giác*: Tổng các góc trong một tứ giác bằng  $360^\circ$ .

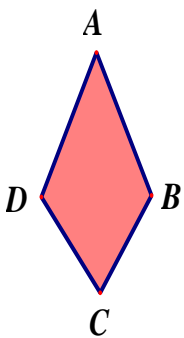


## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

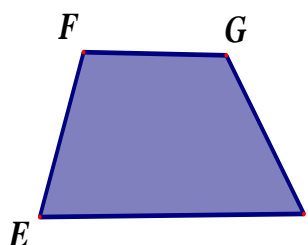
**Dạng 1:** Nhận biết tứ giác lồi.

▪ Dựa vào phần nhận biết tứ giác lồi.

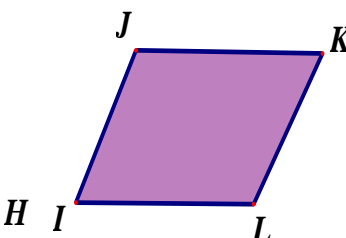
**Ví dụ 1.** Quan sát các hình vẽ bên dưới và cho biết hình nào là tứ giác lồi. Đọc tên các cạnh, các đỉnh, các góc của tứ giác lồi đó.



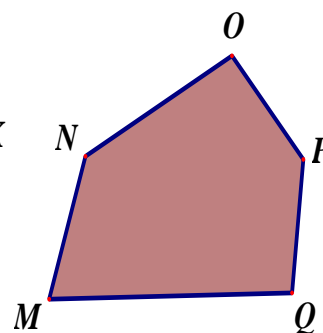
Hình a  
Speedmath.vn



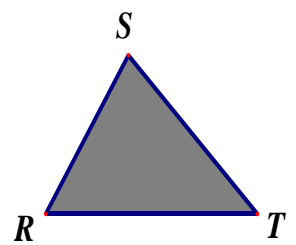
Hình b



Hình c



Hình d



Hình e

**Lời giải:**

Các tứ giác lồi là hình a, hình b, hình c.

Tứ giác ABCD có : cạnh AB; BC; CD; AD. Đỉnh là đỉnh A; B; C; D. Góc là góc A; B; C; D.

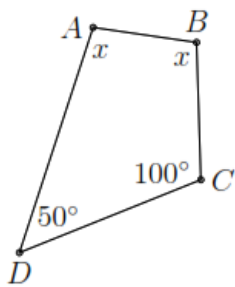
Tứ giác FGHE có : cạnh FG; GH; EH; EF. Đỉnh là đỉnh F; G; H; E. Góc là góc F; G; H; E.

Tứ giác IJKL có : cạnh JK; KL; JL; IJ. Đỉnh là I; J; K; L. Góc là góc I; J; K; L.

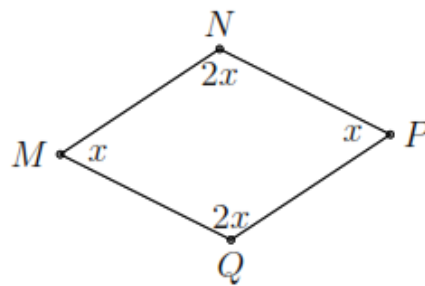
**Dạng 2: Tính số đo góc**

- Dựa vào định lý tổng bốn góc trong một tứ giác .

**Ví dụ 2.** Tìm  $x$  trong hình vẽ.



a) Hình 1.3



b) Hình 1.4

**Lời giải**

a) Ta có tổng các góc trong tứ giác là  $360^\circ$  nên

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow x + x + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ.$$

b) Ta có tổng các góc trong tứ giác là  $360^\circ$  nên

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} + \hat{Q} = 360^\circ \Rightarrow x + 2x + x + 2x = 360^\circ \Rightarrow 6x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ.$$

**Dạng 3: Tính chu vi, diện tích hình tứ giác**

- Vận dụng các kiến thức chu vi , diện tích một số hình đã học

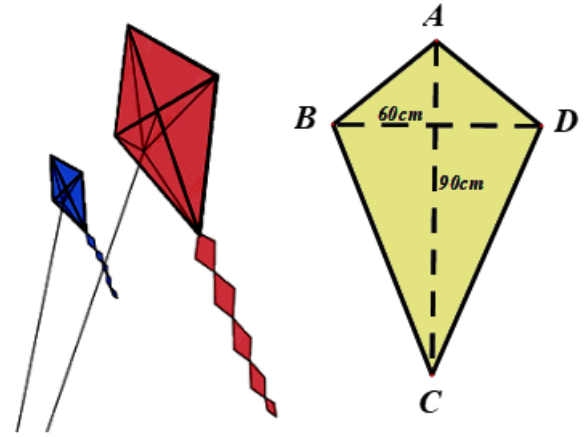
**Ví dụ 3**

Tùng làm một con diều có dạng tứ giác ABCD. Cho biết AC là trung trực của BD và AC = 90 cm, BD = 60 cm. Tính diện tích thân diều.

**Lời giải**

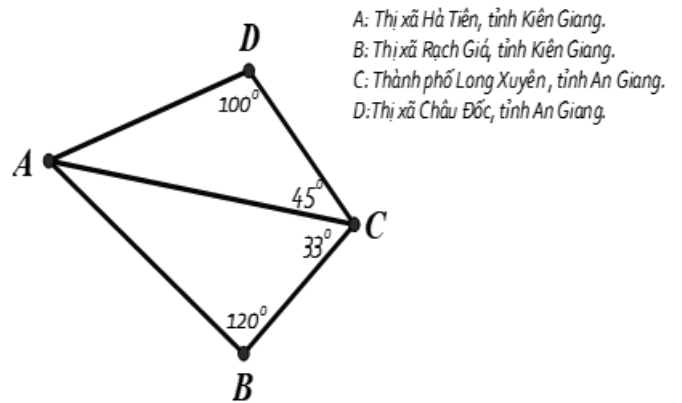
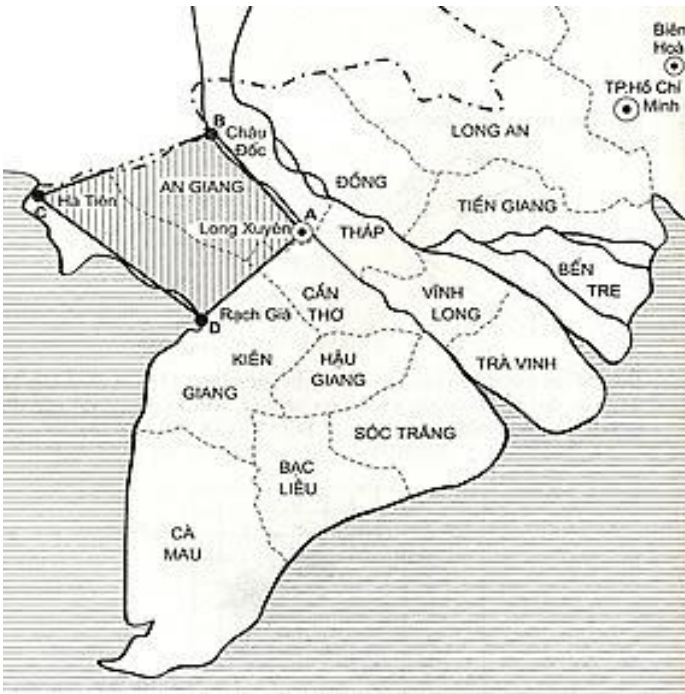
Tứ giác ABCD có  $AC \perp BD$  (AC là trung trực của BD)

Do đó :  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 90 = 2700 (cm^2)$



**Ví dụ 4**

Tứ giác Long Xuyên là một vùng đất là một vùng đất hình tứ giác thuộc vùng đồng bằng sông Cửu Long trên địa phận của ba tỉnh thành : Kiên Giang, An Giang và Cần Thơ, Bốn cạnh của tứ giác này là biên giới Việt Nam – Campu chia, vịnh Thái Lan, kênh Cải Sắn và sông Bassac (sông Hậu). Bốn đỉnh của tứ giác là thành phố Long Xuyên, thành phố Châu Đốc, thị xã Hà Tiên và thành phố Rạch Giá (như hình vẽ bên dưới).



Tính góc còn lại của tứ giác ABCD.

**Lời giải**

Ta có  $\hat{C} = 45^\circ + 33^\circ = 78^\circ$ .

Áp dụng định lí tổng bốn góc trong một tứ giác ta có :

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

$\Rightarrow \hat{A} = 360^\circ - 100^\circ + 78^\circ + 120^\circ = 360^\circ - 298^\circ = 62^\circ$

**Dạng 4: Chứng minh hình học**





**Bài 3.** Cho tứ giác  $MNPQ$  có  $\hat{N} = \hat{M} + 10^\circ$ ,  $\hat{P} = \hat{N} + 10^\circ$ ,  $\hat{Q} = \hat{P} + 10^\circ$ . Hãy tính các góc của tứ giác  $MNPQ$ .  
ĐS:  $\hat{M} = 75^\circ$ ;  $\hat{N} = 85^\circ$ ;  $\hat{P} = 95^\circ$ ;  $\hat{Q} = 105^\circ$ .

**Bài 4.** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{C} = 60^\circ$ ,  $\hat{D} = 80^\circ$ ,  $\hat{A} - \hat{B} = 10^\circ$ . Tính số đo của  $\hat{A}$  và  $\hat{B}$ .  
ĐS:  $\hat{A} = 115^\circ$ ,  $\hat{B} = 105^\circ$ .

**Bài 5.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau tại  $O$ .

a) Chứng minh

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2;$$

b) Cho  $AD = 5$  cm,  $AB = 2$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính độ dài  $CD$ .

ĐS:  $CD = 11$  cm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

# HÌNH THANG CÂN

## A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

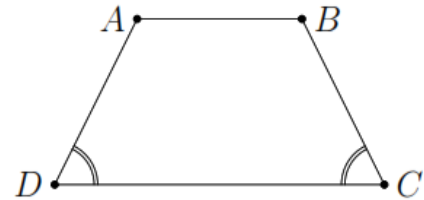
### 1. Định nghĩa.

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

### 2. Tính chất.

Trong hình thang cân:

- Hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Hai cạnh bên bằng nhau.
- Hai đường chéo bằng nhau.

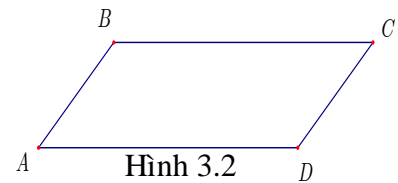


Hình 3.1

### 3. Dấu hiệu nhận biết.

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

**Lưu ý:** Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa chắc là hình thang cân. Chẳng hạn hình thang như hình bên.



Hình 3.2

cân.  
thang

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1: Tính số đo góc

- Trong hình thang cân, hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Trong hình thang, hai góc kề một cạnh bên bù nhau.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên các cạnh bên  $AB, AC$  lấy theo thứ tự các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ .

- Chứng minh  $BDEC$  là hình thang cân;
- Tính góc của hình thang cân đó, biết rằng  $\hat{A} = 50^\circ$ .

### Lời giải

$$\text{a) } \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } \angle BCA = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}. \quad (1)$$

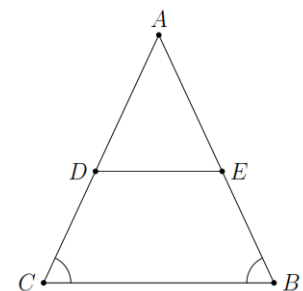
Do  $AD = AE$  nên  $\triangle ADE$  cân tại  $A$

$$\Rightarrow \angle DEA = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \angle BCA = \angle DEA \Rightarrow BC \parallel ED. \quad (3)$$

$$\text{Lại có } \hat{B} = \hat{C}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $BCDE$  là hình thang cân.



b) Vì  $BCDE$  là hình thang cân nên

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ; \hat{E} = \hat{D} = 180^\circ - \hat{C} = 115^\circ.$$

**Dạng 2: Chứng minh đoạn thẳng hoặc góc bằng nhau**

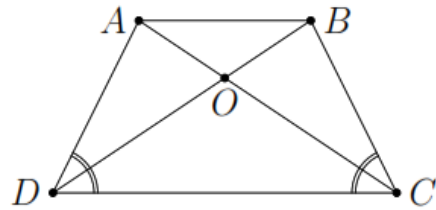
- Sử dụng các tính chất của hình thang cân để chứng minh.
- Sử dụng các kết quả đã biết về chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau để chứng minh.

**Ví dụ 2.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh  $OA = OB$ ,  $OC = OD$ .

**Lời giải**

Do  $ABCD$  là hình thang cân có  $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \hat{ADC} = \hat{BCD}. \end{cases}$$



Xét hai tam giác  $\triangle ADC$  và  $\triangle BCD$  có

$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{ADC} = \hat{BCD} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD \text{ (c.g.c)} \\ CD \text{ chung} \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{ACD} = \hat{BDC}$  (cặp góc tương ứng). Suy ra  $\triangle OCD$  cân tại  $O \Rightarrow OC = OD$ .

Chứng minh tương tự với  $OA = OB$ .

**Ví dụ 3.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$ , đường chéo  $DB$  vuông góc với cạnh bên  $BC$ ,  $DB$  là tia phân giác góc  $D$ . Tính chu vi của hình thang, biết  $BC = 3$  cm.

**Lời giải**

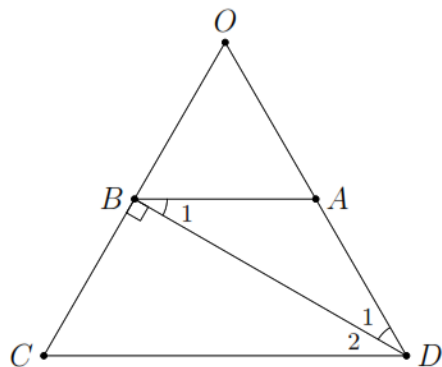
Trong hình thang cân  $ABCD$  có  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow B_1 + 90^\circ + D_1 + D_2 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

Gọi  $O = BC \cap AD \Rightarrow \triangle OCD$  đều nên  $\angle AOB = 60^\circ$ .

$\triangle OAB$  có  $OA = OB$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$



$\Rightarrow \triangle OAB$  đều  $\Rightarrow BA = AD = BC$ .

Chu vi của hình thang  $ABCD$  là  $3 + 3 + 6 + 3 = 18$  cm.

**Dạng 3: Chứng minh tứ giác là hình thang cân**

- Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

**Ví dụ 4.** Cho hình thang  $MNPQ$ , ( $MN \parallel PQ$ ), có  $MP = NQ$ . Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $MP$ , cắt đường thẳng  $PQ$  tại  $K$ . Chứng minh

- a)  $\triangle NKQ$  là tam giác cân;
- b)  $\triangle MPQ = \triangle NQP$ ;
- c)  $MNPQ$  là hình thang cân.

**Lời giải**

a) Từ  $N$  kẻ tia  $Nx \parallel MP$ ,  $Nx \cap QP = K$ .

Do  $MN \parallel PK \Rightarrow NK = MP \Rightarrow NK = NQ (= MP) \Rightarrow \triangle NKQ$  cân tại  $N$ .

b) Do  $\triangle NKQ$  cân tại  $N$  nên  $NQP = NKQ$ . Mà  $NKQ = MPQ$  (hai góc đồng vị), nên  $NQP = MPQ$ .

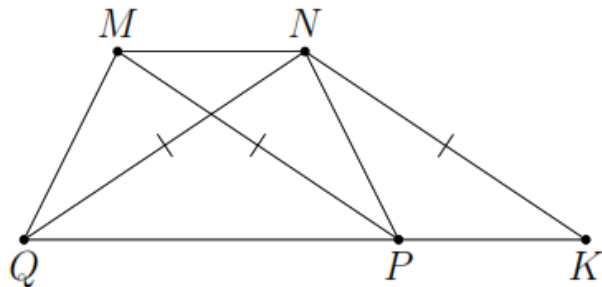
Xét  $\triangle MQP$  và  $\triangle NPQ$  có

- $MP = NQ$  (giả thiết);
- $MPQ = NQP$  (chứng minh trên);
- $QP$  là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle MQP = \triangle NPQ$  (c.g.c).

c) Do  $\triangle MPQ = \triangle NQP$  nên  $MQP = NPQ$

$\Rightarrow MNPQ$  là hình thang cân.



**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , các đường phân giác  $BD, CE$  ( $D \in AC, E \in AB$ ).

- a) Chứng minh  $BEDC$  là hình thang cân;
- b) Tính các góc của hình thang cân  $BEDC$ , biết  $\hat{C} = 50^\circ$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $E$  là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh

- a)  $OA = OB, OC = OD$ ;
- b)  $EO$  là đường trung trực của hai đáy hình thang  $ABCD$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AD \parallel BC, AD > BC$ ) có đường chéo  $AC$  vuông góc với cạnh bên  $CD$ ,  $AC$  là tia phân giác góc  $BAD$  và  $\hat{D} = 60^\circ$ .

- a) Chứng minh  $ABCD$  là hình thang cân;
- b) Tính độ dài cạnh  $AD$ , biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Lấy điểm  $D$  trên cạnh  $AB$ , điểm  $E$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $AD = AE$ .

- a) Tứ giác  $BDEC$  là hình gì? Vì sao?
- b) Các điểm  $D, E$  ở vị trí nào thì  $BD = DE = EC$  ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

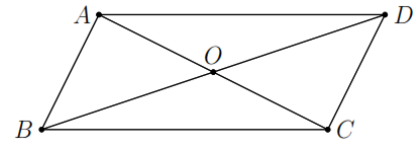


# HÌNH BÌNH HÀNH

## A. KIẾN THỨC TRONG TÂM.

### 1. Định nghĩa.

- Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song.
- $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$



### 2. Tính chất.

Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

### 3. Dấu hiệu nhận biết.

- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

**Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình bình hành**

- Dựa vào một trong năm dấu hiệu.

**Ví dụ 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , đường chéo  $BD$ . Kẻ  $AH$  và  $CK$  vuông góc với  $BD$  tại  $H$  và  $K$ . Chứng minh tứ giác  $AHCK$  là hình bình hành.

### Lời giải

Vì  $ABCD$  là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ BC \parallel AD; BC = AD. \end{cases}$$

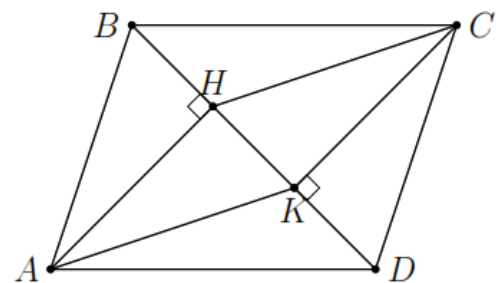
Vì  $AB \parallel CD \Rightarrow \angle ABH = \angle CDK$  (so le trong).

$$\text{Vì } \begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp DB \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK \quad (1).$$

Vì  $\triangle HAB = \triangle KCD$  (cạnh huyền - góc nhọn).

$$\Rightarrow AH = CK \quad (\text{hai cạnh tương ứng}) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $AHCK$  là hình bình hành.



**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $B$ , vuông góc với  $AC$  tại  $C$  cắt nhau ở  $D$ . Chứng minh tứ giác  $BDCH$  là hình bình hành.

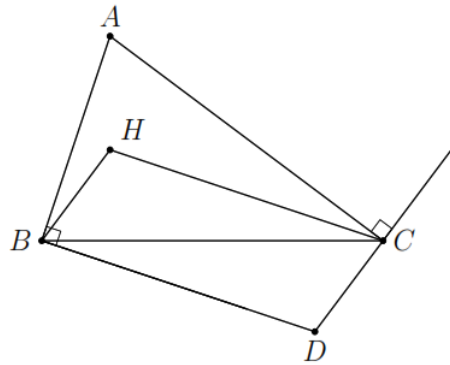
**Lời giải**

Xét  $\triangle ABC$  có  $H$  là trực tâm, suy ra  $CH \perp AB$ ;  $BH \perp AC$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BD \quad (1).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CD \quad (2).$$

Từ 1 và 2 suy ra tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành.



**Dạng 2: Sử dụng tính chất hình bình hành để chứng minh tính chất hình học**

- **Sử dụng tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.**

**Ví dụ 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$ ,  $F$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh:

- a)  $BE = DF$  và  $\angle ABE = \angle CDF$ ;    b)  $BE \parallel DF$ .

**Lời giải**

a) Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ \angle ABC = \angle ADC \end{cases} \Rightarrow ED \parallel BF \quad (1).$$

$$\text{Vì } E \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow AE = ED = \frac{AD}{2}.$$

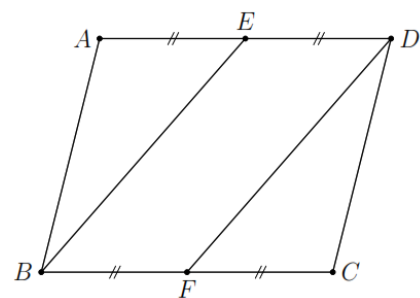
$$\text{Vì } F \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow BF = FC = \frac{BC}{2}.$$

$$\text{Do đó } ED = BF \quad (2).$$

Từ 1 và 2  $\Rightarrow$  Tứ giác  $BEDF$  là hình bình hành  $\Rightarrow BE = DF$ .

Vì  $BEDF$  là hình bình hành nên  $\angle EBF = \angle EDF$ .

Mà  $\angle ABC = \angle ADC \Rightarrow \angle ABE = \angle CDF$ .



b) Vì tứ giác  $BEDF$  là hình bình

hành suy ra  $BE \parallel DF$ .

**Dạng 3: Sử dụng tính chất hình bình hành để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy**

- Vận dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường để chứng minh.

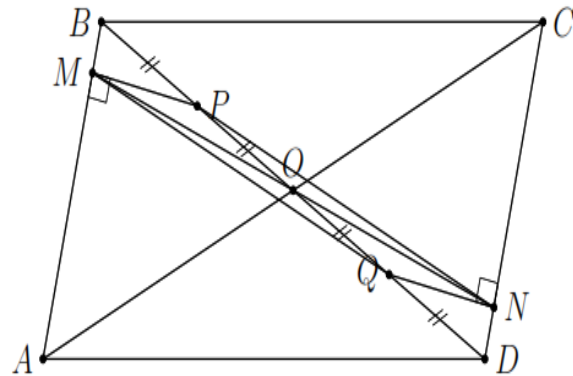
**Ví dụ 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $OB$ ,  $OD$ . Kẻ  $PM$  vuông góc với  $AB$  tại  $M$ ,  $QN$  vuông góc với  $CD$  tại  $N$ . Chứng minh ba điểm  $M, O, N$  thẳng hàng và các đường thẳng  $AC, MN, PQ$  đồng quy.

**Lời giải**

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AB \parallel CD$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} QN \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow QN \perp AB.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} QN \perp AB \\ MP \perp AB \end{cases} \Rightarrow MP \parallel NQ \quad (1).$$



Ta có  $\triangle MPB = \triangle NQD$  (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow MP = NQ \quad (2).$$

Từ 1 và 2 suy ra tứ giác  $MPNQ$  là hình bình hành.

Xét hình bình hành  $MPNQ$  có  $O$  là trung điểm của  $PQ$ .

Suy ra  $O$  là giao điểm hai đường chéo của của hình bình hành  $MPNQ$ .

$$\Rightarrow M, O, N \text{ thẳng hàng.}$$

Do đó  $AC, MN, PQ$  cùng đi qua  $O$ .

Hay  $AC, MN, PQ$  đồng quy.

**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$  ( $AB > BC$ ). Tia phân giác của góc  $D$  cắt  $AB$  ở  $E$ , tia phân giác của góc  $B$  cắt  $CD$  ở  $F$ .

- a) Chứng minh  $DE \parallel BF$ ;
- b) Tứ giác  $DEBF$  là hình gì?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Từ một điểm  $E$  trên cạnh  $AC$  vẽ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $F$  và đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Giả sử  $AE = BF$ . Chứng minh:

- a) Tam giác  $AED$  cân;
- b)  $AD$  là phân giác của góc  $A$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$ . Qua điểm  $O$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$  cắt hai cạnh  $AD, BC$  lần lượt tại  $M, N$ . Trên  $AB, CD$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $AP = CQ$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $PQ$ . Chứng minh:

- a) Các tứ giác  $AMNB, APCQ$  là hình bình hành;
- b) Ba điểm  $M, N, I$  thẳng hàng;
- c) Ba đường thẳng  $AC, MN, PQ$  đồng quy.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $K, I$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh:

- a)  $AI = CK$  và  $IAC = KCA$ ;
- b)  $AI \parallel CK$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Trên  $AB$  lấy điểm  $K$ , trên  $CD$  lấy điểm  $I$  sao cho  $AK = CI$ . Chứng minh rằng ba điểm  $K, O, I$  thẳng hàng và các đường thẳng  $AC, BD, KI$  đồng quy.

**Bài 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$ . Qua điểm  $O$ , vẽ đường thẳng  $a$  cắt hai đường thẳng  $AD, BC$  lần lượt tại  $E, F$ . Qua  $O$  vẽ đường thẳng  $b$  cắt hai cạnh  $AB, CD$  lần lượt tại  $K, H$ . Chứng minh tứ giác  $EKFH$  là hình bình hành.

## HÌNH CHỮ NHẬT

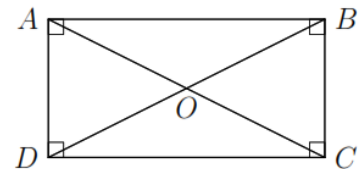
### A. KIẾN THỨC TRONG TÂM

#### 1. Định nghĩa

- Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- Tứ giác ABCD là hình chữ nhật khi và chỉ khi

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ.$$

**Nhận xét:** Hình chữ nhật cũng là hình bình hành, cũng là hình thang.



#### 2. Tính chất

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.
- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.
- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

#### 3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

#### 4. Áp dụng vào tam giác vuông

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

#### Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

- Vận dụng các dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC. Lấy D là điểm đối xứng với H qua I. Chứng minh tứ giác AHCD là hình chữ nhật.

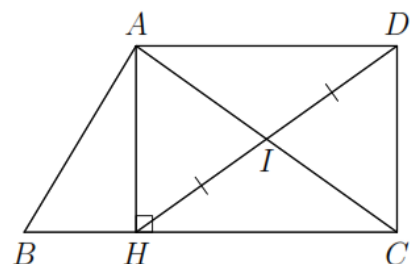
#### Lời giải

Ta có  $IA = IC$  và  $IH = ID$ .

$\Rightarrow$  AHCD là hình bình hành do có hai đường chéo AC và DH nhau tại trung điểm I.

Mà  $\angle AHC = 90^\circ$ .

$\Rightarrow$  AHCD là hình chữ nhật.



cắt

**Dạng 2: Áp dụng vào tam giác vuông**

- Sử dụng định lý về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh vuông góc...

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, K$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, AC$ . Chứng minh:  $IHK = 90^\circ$ ;

**Lời giải**

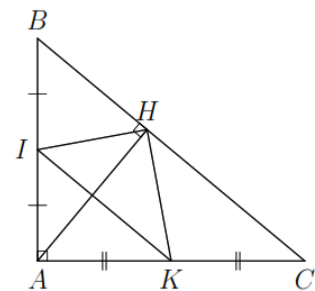
Ta có  $IH = IA$  (trung tuyến tam giác vuông).

$\Rightarrow \triangle IAH$  cân tại  $I$ .

$\Rightarrow IAH = IHA$ .

Chứng minh tương tự:  $HAK = AHK$ .

$\Rightarrow IHK = IHA + AHK = 90^\circ$ .



**Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng**

- Sử dụng các tính chất về vuông góc của hình chữ nhật và định lý Py-ta-go để tính toán.

**Ví dụ 3.** Tìm  $x$  trong hình vẽ bên, Biết  $AB = 13$  cm,  $BC = 15$  cm,  $AD = 10$  cm.

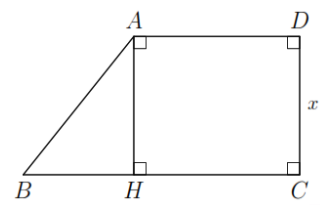
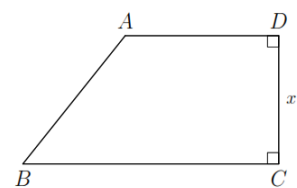
**Lời giải**

Kẻ  $AH \perp BC$ , ta có  $ADCH$  là hình chữ nhật nên

$AD = CH = 10$  cm,  $DC = AH = x$ .

Xét  $\triangle AHB$  vuông tại  $H$  có  $BH = BC - HC = 5$  cm.

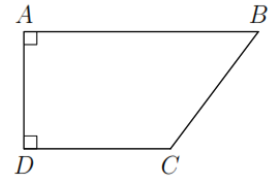
$\Rightarrow x = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 12$  cm.





**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Tìm độ dài  $CD$  trong hình vẽ bên, biết  $AB = 9$  cm,  $AD = 4$  cm,  $BC = 5$  cm.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

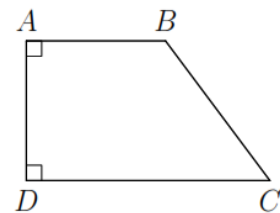
.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Tìm độ dài  $CD$  trong hình vẽ bên, biết  $AB = 7$  cm,  $AD = 8$  cm,  $BC = 10$  cm.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $C$ . Trên các cạnh  $AC$ ,  $BC$  lấy lần lượt các điểm  $P$ ,  $Q$  sao cho  $AP = CQ$ . Từ điểm  $P$  vẽ  $PM$  song song với  $BC$  ( $M \in AB$ ). Chứng minh tứ giác  $PCQM$  là hình chữ nhật.

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $AI$ . Từ  $A$  kẻ tia  $Ax$  vuông góc với  $AC$ , từ  $B$  kẻ tia  $By$  song song với  $AC$ . Gọi  $M$  là giao điểm của tia  $Ax$  và tia  $By$ . Nối  $M$  với trung điểm  $P$  của  $AB$ , đường  $MP$  cắt  $AC$  tại  $Q$  và  $BQ$  cắt  $AI$  tại  $H$ .

a) Tứ giác  $AMBQ$  là hình gì?

b) Chứng minh tam giác  $PIQ$  cân.

.....

.....

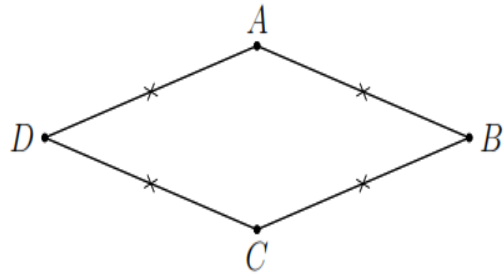
.....

## HÌNH THOI

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

#### 1. Định nghĩa

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi  
 $AB = BC = CD = DA$ .
- Nhận xét: hình thoi là một hình bình hành đặc



#### 2. Tính chất

- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Mỗi đường chéo là đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi mà nó đi qua.

#### 3. Dấu hiệu nhận biết

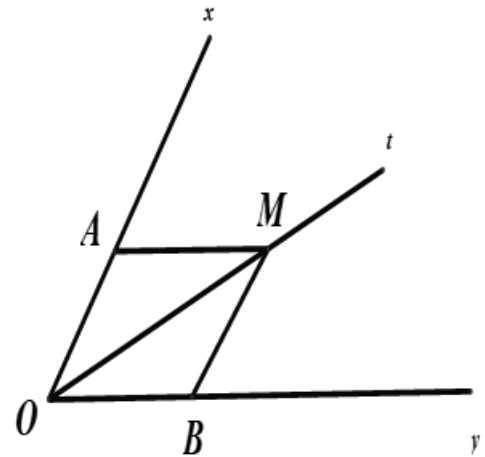
- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh mà nó đi qua là hình thoi.

### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

#### Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình thoi

- Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.

**Ví dụ 1.** Cho góc  $xOy$  và tia phân giác  $Ot$ . Từ điểm  $M$  thuộc  $Oz$  kẻ  $MA \parallel Oy$  và  $MB \parallel Ox$  ( với  $A \in Ox; B \in Oy$ ). Chứng minh tứ giác  $OAMB$  là hình thoi.



Chứng minh:

Ta có  $MA \parallel Oy$  suy ra  $MA \parallel OB$  (1)

$MB \parallel Ox$  suy ra  $MB \parallel OA$  (2)

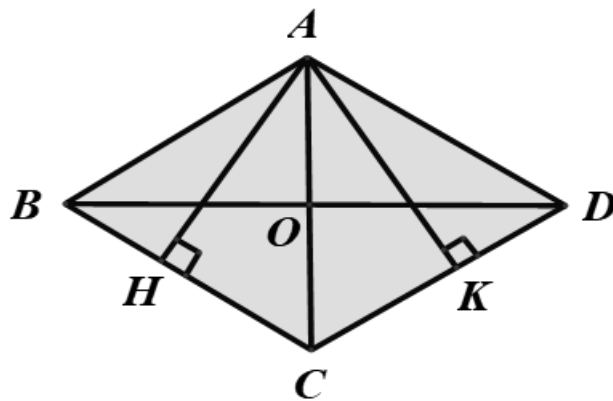
Từ (1) và (2) suy ra  $OAMB$  là hình bình hành . (\*)

Mà  $OM$  là phân giác của góc  $AOB$  (\*\*)

Từ (\*);(\*\*) suy ra  $OAMB$  là hình thoi .

(theo dấu hiệu nhận biết hình thoi).

**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có 2 đường cao  $AH = AK$  . Chứng minh  $ABCD$  là hình thoi.



Chứng minh:

Xét hai tam giác vuông  $AHB$  và  $AKD$  ta có :

$AK = AH$  (gt).

$\widehat{D} = \widehat{B}$  ( $ABCD$  là hình bình hành).

$\Rightarrow AD = AB \Rightarrow ABCD$  là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi ).

**Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình thoi để chứng minh các tính chất khác**

- **Vận dụng các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình thoi.**

**Ví dụ 3.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$  . Kẻ  $AE \perp DC$  ,  $AF \perp BC$  . Chứng minh

a)  $AE = AF$  ;

b) Tam giác  $AEF$  đều.

**Lời giải**

a) Vì  $AC$  là phân giác của  $BCD$

(do  $ABCD$  là hình thoi)

nên  $A$  cách đều hai cạnh  $BC$  và  $CD$ .

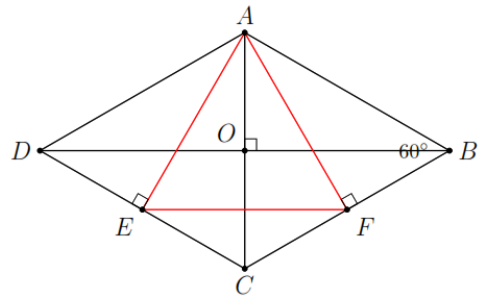
Hay  $AE = AF$ .

b) Hình thoi  $ABCD$  có  $AB = BC$  và  $ABC = 60^\circ$  nên  $\triangle ABC$  đều.

Do đó đường cao  $AF$  cũng là đường phân giác, suy  $CAF = 30^\circ$ .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được  $CAE = 30^\circ$ .

Suy ra  $EAF = 60^\circ$ , vậy  $\triangle AEF$  đều.



ra

**Dạng 3: Tính độ dài cạnh, góc, diện tích hình thoi.**

- Vận dụng các kiến thức đã học để giải quyết bài toán liên quan.

**Ví dụ 4.**

Hai đường chéo của hình thoi có độ dài 16cm và 12cm. Tính :

a/ Diện tích hình thoi

b/ Cạnh hình thoi

c/ Độ dài đường cao hình thoi.

**Lời giải**

a/  $AC = 16\text{cm}; BD = 12\text{cm}$ .

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b/  $OA = 8\text{cm}; OD = 6\text{cm}$ .

Áp dụng định lý Py ta go vào tam giác vuông  $OAD$ , ta có :

$$AD^2 = OA^2 + OD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

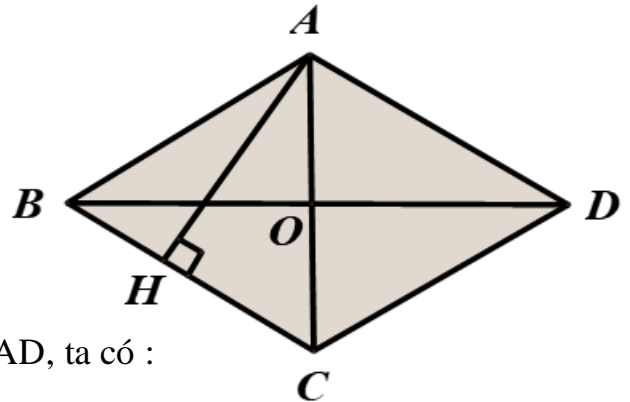
$$\Rightarrow AD = 10 \text{ (cm)}.$$

c/ Kẻ đường cao  $DH$ . Ta cũng có :

$$S_{ABCD} = AB \cdot DH$$

$$\Rightarrow 10 \cdot DH = 96$$

$$\Rightarrow DH = 96 : 10 = 9,6 \text{ (cm)}.$$



### C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$ , phân giác  $AD$ . Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AB$  tại  $E$ , qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh  $EF$  là phân giác của  $AED$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

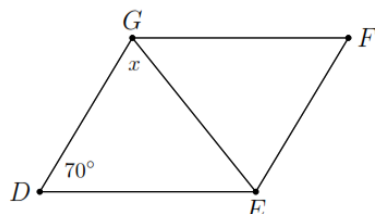
.....

.....

.....

**Bài 2.**

- a) Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo 14. Tính độ dài đường chéo còn lại.
- b) Cho hình thoi  $DEFG$  như hình vẽ bên. Tính  $x$ .



bằng

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AC$  vuông góc với  $BD$ . Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh tứ giác  $AECF$  là hình thoi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

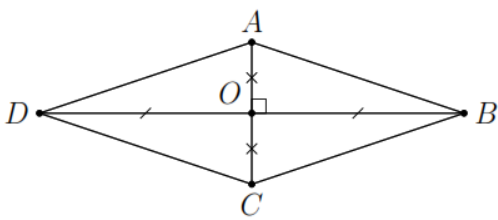
.....

.....

.....

.....

**Bài 4.** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$ . Độ dài  $AC = 8\text{ cm}$ ,  $BD = 10\text{ cm}$ . Tính độ dài cạnh hình thoi.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 5.** Cho hình thoi  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lấy theo thứ tự các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = CN = CP = AQ$ . Chứng minh:



a)  $M, O, P$  thẳng hàng và  $N,$

$O, Q$  thẳng hàng;

b) Tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$ , qua điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$ , kẻ các đường thẳng song song với  $AB$  và  $AC$ , cắt  $AC$  và  $AB$  theo lần lượt ở  $E$  và  $F$ .

a) Tứ giác  $AEDF$  là hình gì?

b) Điểm  $D$  ở vị trí nào trên  $BC$  thì  $ADEF$  là hình thoi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## HÌNH VUÔNG

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

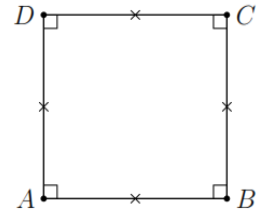
#### 1. Định nghĩa

- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác ABCD là hình vuông khi và chỉ khi

*Nhận xét:*

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

Do đó hình vuông vừa là hình thoi vừa là hình chữ nhật.



#### 2. Tính chất

- Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
- Tính chất đặc trưng:* Trong hình vuông, hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

#### 3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

*Nhận xét:* Nếu một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

#### Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình vuông

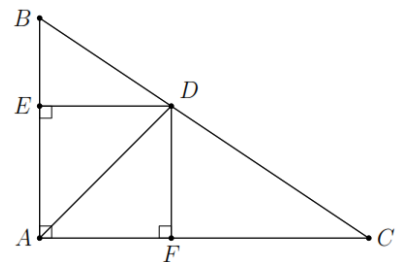
- Vận dụng các dấu hiệu nhận biết hình vuông.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi AD là đường phân giác của góc A ( $D$  thuộc BC), từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Chứng minh rằng AEDF là hình vuông.

**Lời giải**

Xét tứ giác AEDF có  $EAF = AFD = AED = 90^\circ$  nên tứ giác AEDF là hình chữ nhật.

Mà AD là đường chéo đồng thời là đường phân giác nên tứ giác AEDF là hình vuông.





**Dạng 2: Vận dụng tính chất hình vuông để chứng minh các tính chất hình học**

- Sử dụng tính chất về cạnh, góc đường chéo của hình vuông.

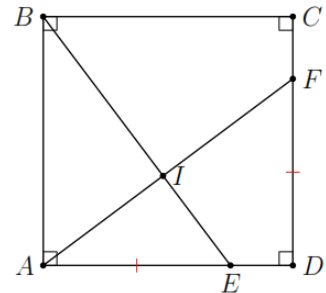
**Ví dụ 2.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$ ,  $DC$  lần lượt lấy các điểm  $E$ ,  $F$  sao cho  $AE = DF$ . Chứng minh:

- Các tam giác  $ADF$  và  $BAE$  bằng nhau.
- $BE \perp AF$ .

**Lời giải**

- Có  $\triangle ADF = \triangle BAE$  (c.g.c)
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $AF$  và  $BE$ . Ta có  $\angle AEI = \angle DFA$ .

Có  $\angle EAI + \angle AEI = \angle EAI + \angle DFA = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$ .



**Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông**

- Sử dụng các dấu hiệu nhận biết của hình vuông để từ đó kết luận.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $M$  là một điểm thuộc cạnh  $BC$ . Qua  $M$  vẽ các đường thẳng song song với  $AB$  và  $AC$ , chúng cắt các cạnh  $AC$ ,  $AB$  theo thứ tự tại  $E$  và  $F$ .

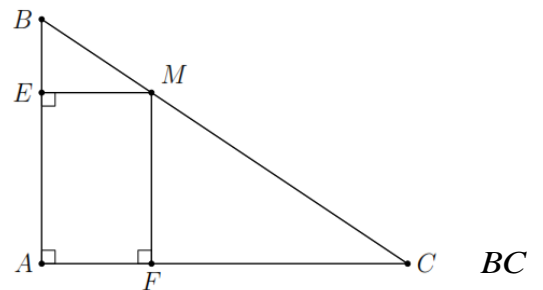
- Tứ giác  $AFME$  là hình gì?
- Xác định vị trí điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  để tứ giác  $AFME$  là hình vuông.

**Lời giải**

a) Tứ giác  $AFME$  có  $\angle EAF = \angle AEM = \angle MFA = 90^\circ$  nên tứ giác  $AFME$  là hình chữ nhật.

b) Để tứ giác  $AFME$  là hình vuông thì đường chéo  $AM$  trở thành đường phân giác của góc  $BAC$

$\Rightarrow M$  là giao điểm của đường phân giác trong góc  $BAC$  với







## BÀI TẬP TỔNG HỢP TỨ GIÁC

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

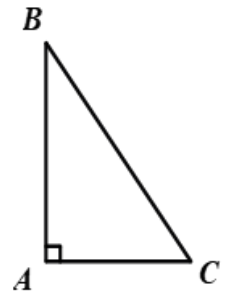
#### 1/ Định lý Pythagore & định lý Pythagore đảo.

- Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

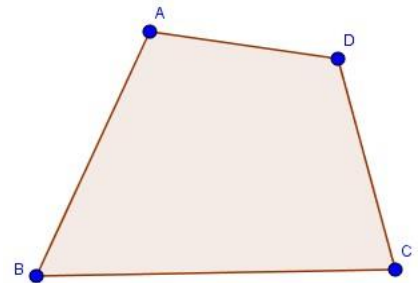
- Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC \text{ có } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

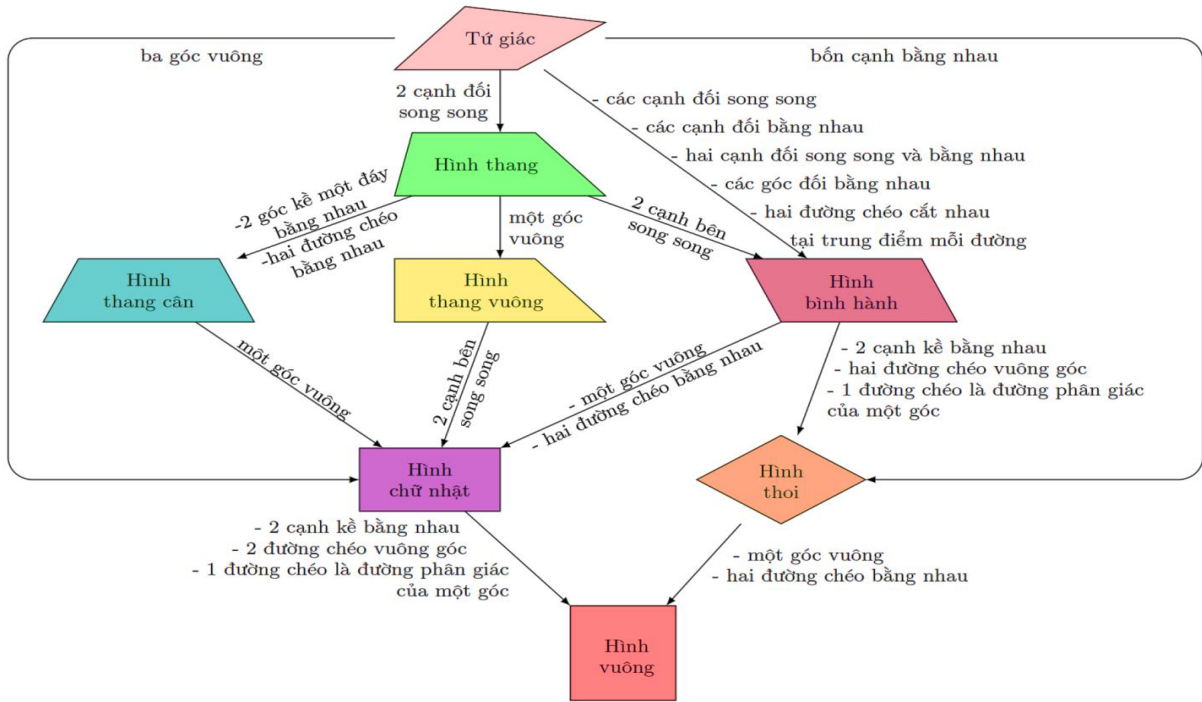


#### 2/ Tứ giác.

- Tứ giác có 4 cạnh, 2 đường chéo, 4 đỉnh và 4 góc.
- *Tứ giác lồi:* Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về cùng một phía của đường thẳng chứa bất kỳ một cạnh nào của tứ giác đó.
- *Tổng các góc trong một tứ giác:* Tổng các góc trong một tứ giác bằng  $360^\circ$ .

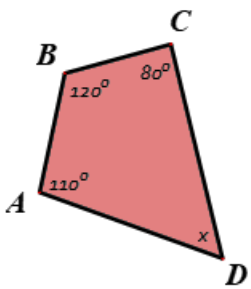


**Sơ đồ nhận biết các loại tứ giác.**

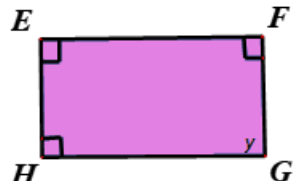


**B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

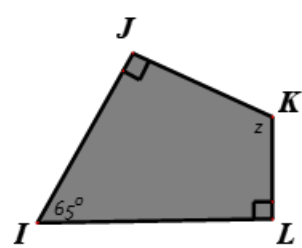
**Bài 1.** Tìm các góc x, y, z chưa biết ở các hình bên dưới.



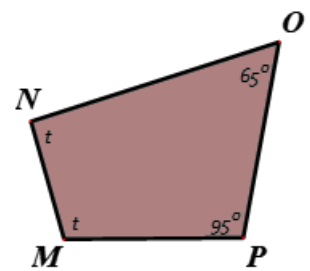
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 2.** Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Cho biết AB = 13cm, AH = 12cm, HC = 16cm. Tính các độ dài AC, BC.

.....

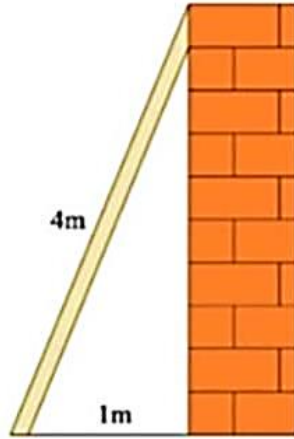
.....

.....

.....

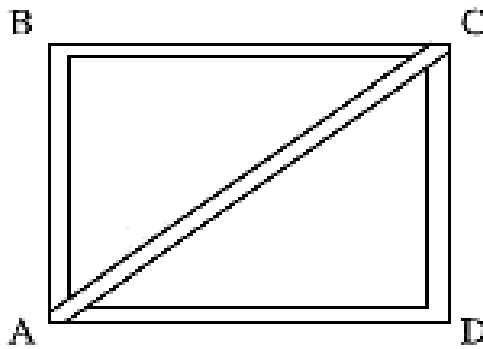


**Bài 3.** Tính chiều cao của bức tường ở hình bên dưới biết rằng chiều dài của thang là 4m và chân thang cách tường là 1m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

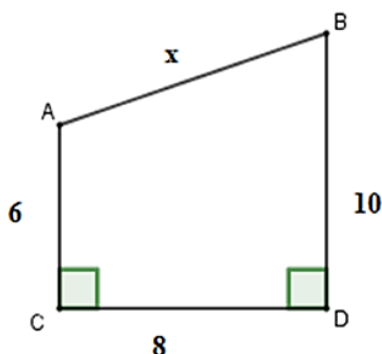


**Bài 4.**

Bạn Hà muốn đóng một nẹp chéo AC để chiếc khung hình chữ nhật ABCD được vững hơn. Tính độ dài AC biết rằng  $AD = 48\text{ cm}$ ,  $CD = 36\text{ cm}$ .



**Bài 5.**



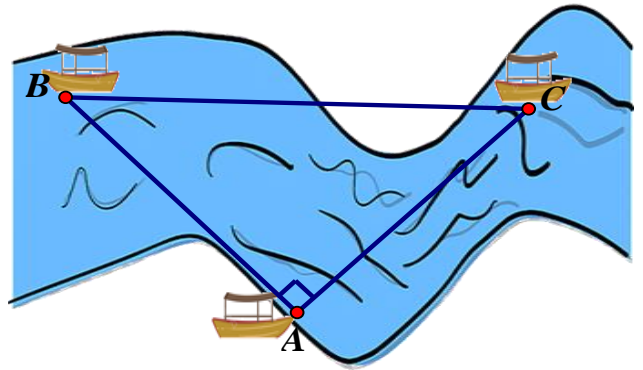
Tìm x trong hình vẽ sau :

**Bài 6.** Hình ảnh bên dưới là một thiết kế ngôi nhà hình tam giác cân đang là xu thế mới trên khắp thế giới ở phân khúc nhà nhỏ. Đây là những thiết kế cơ động, có thể thi công lắp dựng nhanh có chi phí rẻ. Trước ngôi nhà có lắp một tấm kính chống vỡ có dạng tam giác cân . Biết cạnh đáy, cạnh bên của miếng kính này lần lượt có độ dài là 8m và 10m. Tính chiều cao của tấm kính tam giác cân này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) ?



**Bài 7.**

Hai chiếc xuồng máy xuất phát cùng từ bến A đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $90^\circ$  (hình minh họa). Chiếc xuồng máy thứ nhất đi được 12km thì dừng lại tại bến C, còn chiếc xuồng máy thứ hai đi được nửa giờ với vận tốc 18km/h đến B thì chuyển hướng đi thẳng về bến C với vận tốc không đổi.



a/ Hỏi sau bao nhiêu phút từ lúc chiếc xuồng máy thứ hai chuyển hướng đi được đến bến C gặp chiếc xuồng máy thứ nhất ?

b/ Tính diện tích tam giác ABC được tạo thành như hình vẽ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 8** Cho tam giác có  $AB = 7\text{cm}$ ,  $AC = 25\text{cm}$ ,  $BC = 24\text{cm}$  có phải là tam giác vuông không ? Bạn Linh đã giải bài toán đó như sau :

Ta có :

$$AB^2 + AC^2 = 7^2 + 25^2 = 49 + 625 = 674$$

$$BC^2 = 24^2 = 576$$

Do  $674 \neq 576$  nên  $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$  .

Vậy tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

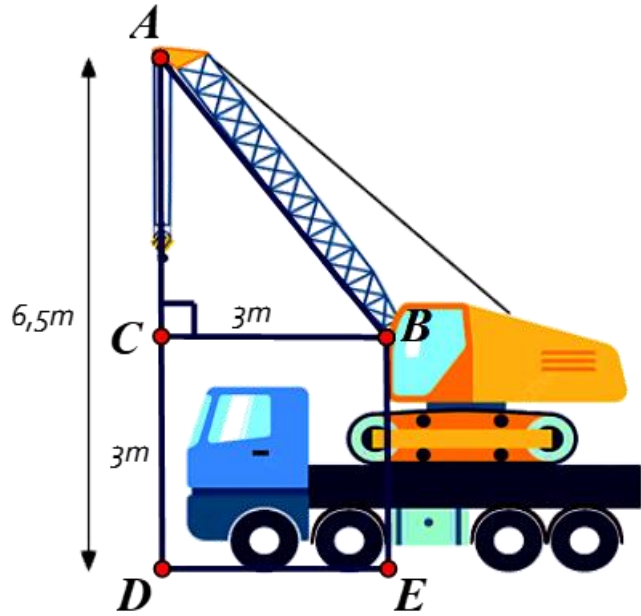
Bạn Nhật cho rằng Bạn Linh giải sai vì tam giác ABC vuông. Theo em ai đúng , ai sai ? Giải thích ?

.....

**Bài 9.** Khi nói đến tivi vi 21 inch, ta hiểu rằng đường chéo màn hình của chiếc tivi này dài 21 inch (*inch : đơn vị đo chiều dài được sử dụng tại nước Anh và một số nước khác,  $1 \text{ inch} \approx 2,54 \text{ cm}$* ). Hỏi chiếc tivi (hình bên) thuộc loại tivi bao nhiêu inch (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*) ?



**Bài 10.** Cho hình vẽ bên dưới. Tính chiều dài cần cẩu AB.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

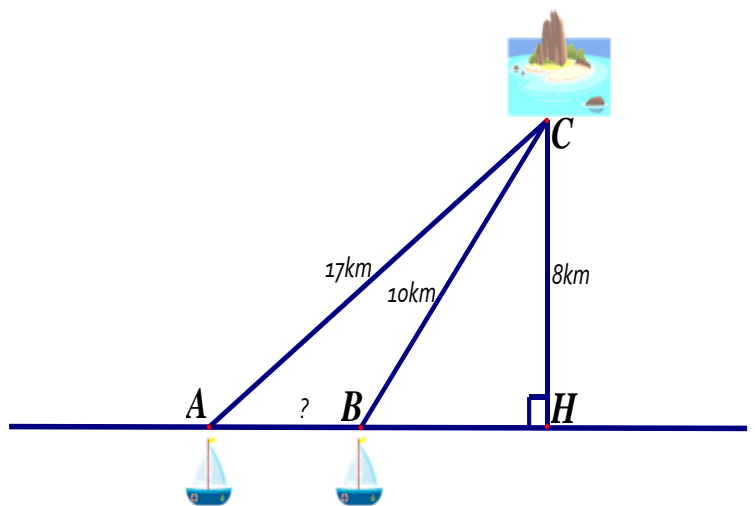
.....

.....

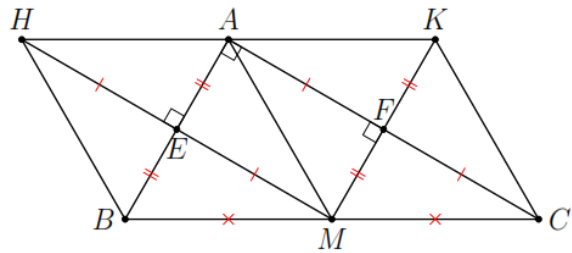
.....

**Bài 11.**

Khoảng cách từ hai bến tàu A và B tới hòn đảo C lần lượt là 17km và 10km (hình ảnh minh họa). Tính khoảng cách AB giữa hai bến tàu biết hòn đảo cách đất liền 8km.



**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ . Gọi  $H$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $MH$  và  $AB$ . Gọi  $K$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $AC$ ,  $F$  là giao điểm của  $MK$  và  $AC$ .



a) Các tứ giác  $AEMF$ ,  $AMBH$ ,  $AMCK$  là hình gì? Vì sao?

h gì? Vì

b) Chứng minh rằng  $H$  đối xứng với  $K$  qua  $A$ .

c) Tam giác vuông  $ABC$  cần thêm điều kiện gì thì tứ giác  $AEMF$  là hình vuông?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 13.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $BC = 2AB$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AD$ . Vẽ  $I$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ .

- a) Tứ giác  $ABEF$  là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh tứ giác  $AIEF$  là hình thang cân.
- c) Chứng minh  $BICD$  là hình chữ nhật.
- d) Tính góc  $AED$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 14.** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD, AB < CD$ ), các đường cao  $AH, BK$ .

- a) Tứ giác  $ABKH$  là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh  $DH = CK$ .
- c) Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $H$ . Các điểm  $D$  và  $E$  đối xứng với nhau qua đường nào?
- d) Tứ giác  $ABCE$  là hình gì?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ . Kẻ  $Ex$  song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $M$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $BMEF$  là hình chữ nhật.

b) Gọi  $K$  đối xứng với  $B$  qua  
sao?

$E$ . Tứ giác  $BAKC$  là hình gì? Vì

c) Gọi  $G$  đối xứng với  $E$  qua  $F$ . Tứ giác  $BGCE$  là hình gì? Vì sao?

d) Tam giác  $ABC$  cần thêm điều kiện gì để tứ giác  $BGCE$  là hình vuông?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 16.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB < AC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , kẻ  $MD$  vuông góc với  $AB$  tại  $D$ ,  $ME$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ .

a) Chứng minh  $AM = DE$ .

b) Chứng minh tứ giác  $DMCE$  là hình bình hành.

c) Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  ( $H \in BC$ ). Chứng minh tứ giác  $DHME$  là hình thang cân và  $A$  đối xứng với  $H$  qua  $DE$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
**Bài 17.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$  và  $AB = AD = \frac{1}{2}CD$ , kẻ  $BH$  vuông góc với  $CD$ .

- a) Chứng minh rằng tứ giác  $ABHD$  là hình vuông.
- b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BH$ . Chứng minh  $A$  đối xứng với  $C$  qua  $M$ .
- c) Kẻ  $DI$  vuông góc với  $AC$ .  $AH$  cắt  $DI$ ,  $DM$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh tứ giác  $DPBQ$  là hình thoi.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
**Bài 18.** Cho hình vuông  $ABCD$ .  $E$  là điểm trên cạnh  $DC$ ,  $F$  là điểm trên tia đối của tia  $BC$  sao cho  $BF = DE$ .

- a) Chứng minh tam giác  $AEF$  vuông cân.
- b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $EF$ . Chứng minh  $I$  thuộc  $BD$ .
- c) Lấy điểm  $K$  đối xứng với  $A$  qua  $I$ . Chứng minh tứ giác  $AEKF$  là hình vuông.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 19.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ . Gọi  $D$  là trung điểm của  $AB$ ,  $E$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $D$ .

- a) Chứng minh  $E$  đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $AB$ .
- b) Các tứ giác  $AEMC$ ,  $AEBM$  là hình gì? Vì sao?
- c) Tam giác vuông  $ABC$  cần thêm điều kiện gì thì tứ giác  $AEBM$  là hình vuông?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Bài 20.** Cho hình bình hành

$MNPQ$  có  $MN = 2MQ$  và  $\hat{M} = 120^\circ$ .

Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $MN, PQ$  và  $A$  là điểm đối xứng của  $Q$  qua  $M$ .

- a) Tứ giác  $MIKQ$  là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh tam giác  $AMI$  đều.
- c) Chứng minh tứ giác  $AMPN$  là hình chữ nhật.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

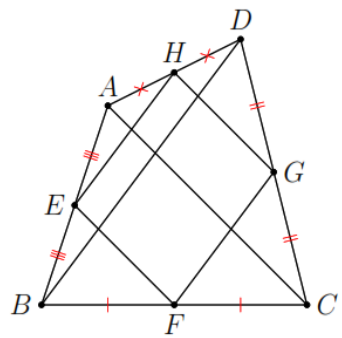
.....

.....

.....

**Bài 21.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $E$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $BC$  ở  $F$ . Qua  $F$  kẻ đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $CD$  ở  $G$ . Qua  $G$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AD$  ở  $H$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $EFGH$  là hình bình hành.
- b) Tứ giác  $ABCD$  cần thêm điều kiện gì để tứ giác  $EFGH$  là hình chữ nhật.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

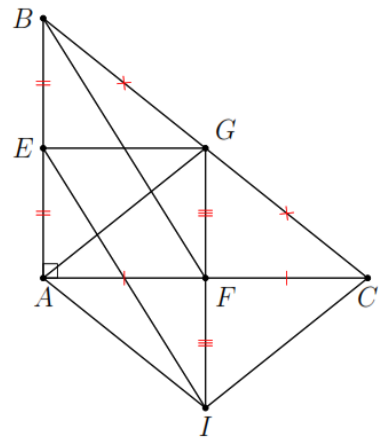
.....

.....

.....

**Bài 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ . Gọi  $E, G, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AC$ . Từ  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $BF$ , đường thẳng này cắt  $GF$  tại  $I$ .

- a) Tứ giác  $AEGF$  là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh tứ giác  $BEIF$  là hình bình hành.
- c) Chứng minh tứ giác  $AGCI$  là hình thoi.
- d) Tìm điều kiện của tam giác  $ABC$  để tứ giác  $AGCI$  là hình vuông.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....