học toán cùng TS. TRẦN HOAN THẦY KENKA

HỌC GIỎI TOÁN CÙNG THẦY KENKA

LỚP 9

học toán cùng TS.TRẦN HOAN THẦY KENKA

Thân chào quý phụ huynh và các con thân yêu!

Thầy Kenka rất vui vì được gửi quyển tài liệu này đến với tay các con và quý phụ huynh.

Thầy chúc cho gia đình mình nhiều sức khỏe, hạnh phúc và bình an.

Với khao khát và mong muốn giúp hàng triệu em học sinh toàn quốc học giỏi toán và yêu thích môn toán. Thầy Kenka đã mở rộng Trung Tâm Toán Tư Duy Kenka đưa vào các khóa học toán online trên website speedmath.vn để tiếp cận nhiều hơn đến các em học sinh trên mọi miền đất nước.

Bố mẹ và các con có thể trải nghiệm học thử toán online tại nhà cùng thầy Kenka tại: https://speedmath.vn/

B1: *Vào website speedmath.vn*

B2: *Chọn lớp cho con.*

B3: *Bấm xem trước bài giảng để cho con học thử.*

HỌC TOÁN ONLINE CÙNG THẦY KENKA
LUÔN BÊN CON NHỮNG KHI CON CẦN

QUÉT MÃ ĐỂ THAM GIA HỌC THỬ NGAY!

GIỚI THIỆU THẦY KENKA

Tiến sĩ Trần Hoan - Thầy Kenka sinh năm 1983 tại Đồng Nai.

Thầy là trưởng bộ môn toán trường Đại học Lạc Hồng từ 2010, thạc sĩ Toán Giải Tích, Tiến sĩ Giáo Dục Toán Học và là người sáng lập **Trung Tâm Toán Tư Duy Kenka** cùng với hệ thống học online **speedmath.vn** với sứ mệnh giúp hàng triệu em học sinh yêu thích và phát triển tư duy về Toán.

Thầy đã công bố nhiều nghiên cứu có giá trị trong Giáo Dục Toán Học theo các hướng khác nhau đặc biệt như: Nghiên cứu dạy học Toán theo định hướng rèn luyện các kỹ năng và năng lực cho học sinh với một số công bố tiêu biểu trên các tạp Chí hàng đầu của Giáo Dục Toán Học: Tạp chí Khoa học Giáo Dục Việt Nam, Tạp chí Khoa Học Đại học sư Phạm TPHCM, tạp chí Khoa học Đại học Huế, Đại học Đà Nẵng… và một số tạp chí quốc tế có uy tín về Giáo Dục Toán Học.

Trong những năm qua, Thầy được nhiều các em học sinh và quý phụ huynh tin tưởng, yêu mến.

Thầy truyền lửa cho các em học sinh yêu thích môn toán, giúp các em từ mất gốc, sợ học toán chuyển sang yêu thích và có kiến thức, kĩ năng vững chắc.

Năm 2015 thầy thành lập trung tâm **Toán Tư Duy Kenka** giảng dạy và bồi dưỡng năng lực Toán học cho các em học sinh.

Năm 2021, hệ thống học online trên **speedmath.vn** do thầy sáng lập bao gồm các lớp toán từ lớp 2 đến lớp 12, được ra đời với mong muốn bồi dưỡng và phát triển nhiều nhân tài Toán học và có thật nhiều các em học sinh trên toàn quốc được tiếp cận và có những giờ học toán thật vui, thật thú vị. Với triết lý giảng dạy "học sinh sẽ học tập một cách hiệu quả nhất khi các em ở trong một môi trường học tập tích cực, nơi mà các em cảm thấy mình được chào đón, thoải mái và an toàn". Chính vì vậy, thầy được rất nhiều quý phụ huynh và các học sinh yêu mến và quyết định đồng hành cùng thầy ở mỗi năm học.

học toán cùng SPEEDMATH THẦY KENKA

LỢI ÍCH HỌC TOÁN ONLINE QUA ZOOM CÙNG THẦY KENKA

- Học trực tiếp cùng thầy Kenka - Tiến Sĩ Trần Hoan
- Trong quá trình học, thầy luôn theo sát và đồng hành cùng tất cả các em
- Sau mỗi buổi học, các em được làm thêm bài tập, thầy sẽ chấm điểm bài tập trên Azota và sửa bài cho các em ở buổi học tiếp theo, nhờ vậy thầy hiểu được khả năng học tập của từng em hơn để có thể kèm cặp và nâng đỡ các em nắm vững kiến thức
- Xoá đi tình trạng mất gốc Toán ở đa số em học sinh, giúp các em vượt qua nỗi sợ học Toán và có thêm động lực học tập
- Sau 2 tháng học sẽ có một bài thi kiểm tra, thầy sẽ chấm điểm và tổng kết tất cả điểm bài tập về nhà, bạn có kết quả thành tích học tập tốt trong quá trình học, thầy sẽ tuyên dương và gửi quà tặng đến những em có thành tích tốt và tiến bộ.
- Thầy luyện thi cho các em rất kỹ và chi tiết để khi thi và làm bài kiểm tra trên trường, các em nắm vững kiến thức và đạt hiệu quả tốt trong trường học.

học toán cùng
TS.TRẦN HOAN
THẦY KENKA

LỢI ÍCH HỌC TOÁN ONLINE TRÊN SPEEDMATH.VN CÙNG THẦY KENKA

- Nắm vững cơ bản kiến thức toán, vượt qua nỗi sợ học Toán
  - Hình thành năng lực tự học, tự giải quyết vấn đề.

- Các em có thể xem đi xem lại bài giảng nếu chưa thật thấu đáo (đối với hệ thống học trên speedmath.vn)

- Hệ thống câu hỏi trắc nghiệm trên speedmath.vn giúp các em kiểm tra khả năng vận dụng kiến thức cơ bản của mình. Đặc biệt hệ thống sẽ chấm điểm và lưu vào học bạ, xét khen thưởng, đổi quà cho các em có thành tích xuất sắc.

- Hướng dẫn thêm từ các Thầy Cô trợ giảng ngay khi các em có thắc mắc về bài học qua việc hỏi đáp trực tiếp trên hệ thống và trên Zalo. Đạt kết quả tốt trong các kỳ thi và yêu thích môn toán.

- Thầy cô trợ giảng cũng thường xuyên kết nối với Quý Phụ huynh để thông tin kết quả học tập của các em, từ đó giúp các em khắc phục những khó khăn khi học môn Toán và cũng tạo được sự tin tưởng khi Phụ huynh đăng ký học Toán online cùng Thầy Kenka trên hệ thống speedmath.vn

MỤC LỤC

II HÌNH HỌC 141

PHẦN I
ĐẠI SỐ

BÀI 1. CĂN THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta vận dụng thích hợp các phép tính về căn thức và các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai. Khi phối hợp các phép biến đổi căn thức với các biến đổi biểu thức có dạng phân thức cần chú ý:

- Trước tiên cần tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) đối với căn thức cũng như đối với phân thức.

$$\boxed{\sqrt{A} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow A \geq 0.}$$

Ví dụ: $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1. \end{cases}$

- Điều kiện để bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \left[\begin{array}{l} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{array}\right.$$

- $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$).

- Với $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

- **Đưa thừa số ra ngoài dấu căn**

  Với $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0, \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

- **Đưa thừa số vào trong dấu căn**

  Với $B \geq 0$, ta có $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{nếu } A \geq 0, \\ -\sqrt{A^2B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

- **Khử mẫu của biểu thức lấy căn**

  Với A, B mà $AB \geq 0$, $B \neq 0$ ta có $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{AB}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

- **Trục căn thức ở mẫu**

  — Với $B > 0$ ta có $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$.

  — Với $A \geq 0, A \neq B^2$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}.$$

  — Với $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}.$$

Kết quả rút gọn để ở dạng nào là tùy thuộc vào yêu cầu cụ thể của bài toán.
Ví dụ: Sau khi thực hiện các phép tính và rút gọn kết quả được

$$P = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x - 1} \text{ (mẫu thức không chứa dấu căn).}$$

Ta cần rút gọn tiếp

$$P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} \text{ (với điều kiện } x \neq 1).$$

Đến đây có thể giải tiếp được những câu hỏi tiếp theo, như tìm x để

— P có giá trị dương;
— P có giá trị bằng k;
— P đạt giá trị nhỏ nhất, ...

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa số

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$.

b) $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}$.

c) $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$.

d) $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau:

a) $M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$.

b) $A = 2015 + \sqrt{36} - \sqrt{25}$.

c) $B = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$.

d) $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$.

e) $D = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$.

f) $E = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$.

g) $F = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{18}$.

h) $G = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$.

i) $H = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2}$.

j) $I = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$.

k) $K = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$.

l) $L = 2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4}$.

m) $N = 2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{75}$.

n) $O = 2\sqrt{3 \cdot 5^2} - 3\sqrt{3 \cdot 2^2} + \sqrt{3 \cdot 3^2}$.

Lời giải.

Dạng 2. Biểu thức dưới dấu căn được đưa về dạng $\sqrt{A^2} = |A|$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{3}$.

b) $B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

c) $C=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\dfrac{1}{2}\sqrt{8}$.

d) $D=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

e) $E=(\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

f) $F=\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{20}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8}$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$.

b) $B = \dfrac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}$.

c) $C = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}}$.

d) $D = 21\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^2 - 6\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2$.

Lời giải.

Dạng 3. Biểu thức dưới dạng phân thức

Phương pháp: Sử dụng các phương pháp quy đồng mẫu số, nhân lượng liên hợp...

Ví dụ 5. Cho $A = \sqrt{3} - 1$; $B = \sqrt{3} + 1$. Tính giá trị của biểu thức $A + B$; $A \cdot B$; $\dfrac{A}{B}$; $A^2 + B^2$ bằng cách rút gọn hoặc biến đổi thích hợp

Lời giải.

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

b) $B = \dfrac{1}{3+\sqrt{7}} + \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$.

c) $C = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - 2\sqrt{5}$.

d) $D = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.

e) $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

f) $F = (\sqrt{3}-1)\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + \dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức $B = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54}$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Rút gọn biểu thức sau $C = \dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ví dụ 10. Thu gọn biểu thức $C = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Rút gọn biểu thức $D = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} - \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Rút gọn biểu thức sau $E = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Tính giá trị biểu thức $F = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Dạng 4. So sánh căn thức

Ví dụ 14. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$;

b) $\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

c) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$;

d) $\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\dfrac{1}{37}}$.

Lời giải.

Ví dụ 15. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$.

b) $5\sqrt{2}$; $\sqrt{39}$; $3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$.

Lời giải.

Ví dụ 16. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự giảm dần:

a) $7\sqrt{2}$; $2\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$ và $5\sqrt{2}$.

b) $3\sqrt{10}$; $5\sqrt{3}$; $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ và $12\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ví dụ 17. So sánh

a) $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$.

b) $\sqrt[3]{5}$ và 2.

c) $4\sqrt[3]{5}$ và $5\sqrt[3]{4}$.

d) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$.

Lời giải.

Ví dụ 18. So sánh các biểu thức sau

a) $\sqrt[3]{9}$ và 2.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ và $\dfrac{3}{4}$.

c) $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$.

d) $-6\sqrt[3]{7}$ và $7\sqrt[3]{(-6)}$.

e) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{11}$.

f) $\sqrt[3]{10}-2$ và $\sqrt[3]{2}$.

g) $\sqrt{2}+1$ và $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

h) $\sqrt{3}-2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3}-25}$.

Lời giải.

Dạng 5. Rút gọn biểu thức chứa ẩn

Ví dụ 19. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} - x^2$.

b) $\dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x+1}$, với $x > 1$.

c) $\dfrac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1}$ với $x > -\dfrac{1}{2}$.

d) $9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x < 2$.

Lời giải.

Ví dụ 20. Cho các biểu thức

$$A = \sqrt{20a + 92 + \sqrt{a^4 + 16a^2 + 64}}.\ B = a^4 + 20a^3 + 100a^2.$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A + B = 0$.

Lời giải.

....

Ví dụ 21. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{(a-1)^2(2a+1)^2}$ với $a > 1$;

b) $B = \sqrt{(b-1)(b+7)+16}$ với $b < -3$;

c) $C = \sqrt{c^2+10c+25} - \sqrt{c^2-10c+5}$ với $-5 \leq c \leq 5$;

d) $D = \dfrac{1-d}{\sqrt{d^2-2d+1}} + \dfrac{\sqrt{d^2-4d+4}}{d-2}$ với $d > 2$.

Lời giải.

....

Ví dụ 22. Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$ với $ab \neq 0$.

Lời giải.

....

Ví dụ 23. Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$ với $(a \geq 0; a \neq 1)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 24. Rút gọn biểu thức $Q=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+1+\sqrt{x-2}$ với $2\leq x<3$.

Lời giải.

Ví dụ 25. Rút gọn biểu thức: $A=\left(\dfrac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1$.

Lời giải.

Ví dụ 26. Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ (với $x\neq 1; x\geq 0$).
Rút gọn A, sau đó tính giá trị $A-1$ khi $x=2016+2\sqrt{2015}$.

Lời giải.

Dạng 6. Một số bài toán tổng hợp

Ví dụ 27. Cho biểu thức $P = \dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải.

Ví dụ 28. Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\dfrac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$.

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q=2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính

a) $3\sqrt{2}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

b) $5\sqrt{48}-4\sqrt{27}-2\sqrt{75}+\sqrt{108}$;

c) $2\sqrt{24}-2\sqrt{54}+3\sqrt{6}-\sqrt{150}$;

d) $\sqrt{125}-2\sqrt{20}-3\sqrt{80}+4\sqrt{45}$;

e) $2\sqrt{28}+2\sqrt{63}-3\sqrt{175}+\sqrt{112}$;

f) $10\sqrt{28}+2\sqrt{275}-3\sqrt{343}-\dfrac{3}{2}\sqrt{396}$;

g) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

h) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$;

i) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-2$;

j) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$.

Bài 2. Tính

a) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})$;

b) $(2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})$;

c) $6\sqrt{\dfrac{8}{9}}-5\sqrt{\dfrac{32}{25}}+14\sqrt{\dfrac{18}{49}}$;

d) $2\sqrt{\dfrac{16}{3}}-3\sqrt{\dfrac{1}{27}}-6\sqrt{\dfrac{4}{75}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$;

f) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{9-4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$;

h) $\dfrac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$.

Bài 3. Tính

a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

d) $\sqrt{46+6\sqrt{5}}$;

e) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$;

f) $\sqrt{16+2\sqrt{15}}$;

g) $\sqrt{23-4\sqrt{15}}$;

h) $\sqrt{17-4\sqrt{15}}$;

i) $\sqrt{16+8\sqrt{3}}$;

j) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

k) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

l) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

m) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

n) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$;

o) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}$;

p) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$;

q) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-2$;

r) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$.

Bài 4. Tính

a) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

e) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{12+6\sqrt{3}}$;

f) $\sqrt{21-4\sqrt{5}}+\sqrt{21+4\sqrt{5}}$;

g) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

h) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

i) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

j) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$.

Bài 5. Tính

a) $(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

b) $(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{17-3\sqrt{32}}+\sqrt{17+3\sqrt{32}}$;

d) $\sqrt{49-5\sqrt{96}}-\sqrt{49+5\sqrt{96}}$;

e) $(5+4\sqrt{2})(3+2\sqrt{1+\sqrt{2}})(3-2\sqrt{1+\sqrt{2}})$;

f) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

g) $(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{2})\sqrt{3}$;

h) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{2}$;

i) $2+\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$;

j) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;

k) $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}$;

l) $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức

a) $\dfrac{15}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{8}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{6}{3-\sqrt{6}}-9\sqrt{6}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

c) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

e) $\sqrt{9-2\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

f) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

g) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

h) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{2}{4-\sqrt{15}}}+6\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

i) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-4\sqrt{2}$.

j) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

k) $\sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-2\sqrt{3}$.

Bài 8. Tính

a) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

Bài 9.

a) Tính $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3$;

b) Tính giá trị của biểu thức $A=x^3y-xy^3$ với $x=\dfrac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$; $y=\dfrac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$.

Bài 10. Cho $P=\dfrac{2\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|}{3x+2\sqrt{x}-1}$. Rút gọn P rồi tính giá trị của P với $x=\dfrac{4}{9}$; $x=\dfrac{9}{4}$.

Bài 11. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{4x}{4-x}\right):\dfrac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}$.

a) Rút gọn P;

b) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

c) Tìm x để $P=2$.

Bài 12. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}\right)\cdot\dfrac{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}{6\sqrt{x}-18}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm các giá trị của x để $P>0$;

c) Tìm các giá trị của x để $P<1$.

Bài 13. Cho biểu thức $P=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm x để $|P|=\dfrac{2}{3}$;

c) Chứng minh rằng với những giá trị của x làm cho P được xác định thì $P<1$.

Bài 14. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P;

c) Tìm x để $P \cdot \dfrac{x-1}{x^2+8x} < -2$.

Bài 15. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4x}{4-x}\right) : \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}.$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

c) Tìm x để $P = 2$.

d) Tìm các giá trị của x để $P \leq 3$.

e) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

f) Biết $Q = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x+1}$ (với $x \geq 0$, $x \neq -1$). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P \cdot Q$.

Bài 16. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}.$$

a) Rút gọn Q.

b) Tính giá trị của Q khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

c) Tìm x để $Q = 2$.

d) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Bài 17. Cho biểu thức

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{24-8\sqrt{5}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

d) Tìm x để $|P| = \dfrac{2}{3}$.

e) Chứng minh rằng với những giá trị của x làm cho P được xác định thì $P < 1$.

Bài 18. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

c) Tìm giá trị của x để $P = \sqrt{x}$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

e) Tìm x để $P \cdot \dfrac{x-1}{x^2+8x} < -2$.

Bài 19. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-2}\right) : \left[1 + \frac{3-x}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right].$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

c) Tìm giá trị của x để $P = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên.

e) Tìm x để $P < 1 - \sqrt{x}$.

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 20 (Sở GD&ĐT Hà Nội, năm 2003-2004). Cho biểu thức

$$P = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1},$$

với điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.

c) Tìm giá trị của x để $P = 3$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

e) Tìm x để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 21 (Chuyên Hà Nội, năm 2004-2005 - Vòng 1). Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2.$$

a) Hãy rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm x thỏa mãn $P = \sqrt{x} + 1$.

d) Tìm x để $\dfrac{P}{\sqrt{x}} > 2$.

e) Tìm giá trị $x \in \mathbb{Z}$ sao cho biểu thức $Q = P \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{x-3}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 22 (Sở GD&ĐT Hà Nội, năm 2015-2016). Cho hai biểu thức

$$P=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \text{ và } Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$$

với $x\geq 0$; $x\neq 4$.

a) Tính giá trị của P khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức Q.

c) Tìm giá trị của x để $Q=2$.

d) Tìm giá trị của x để $\dfrac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 23 (Sở GD&ĐT Bắc Giang, năm 2018-2019). Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{6}{a-1}+\frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right)\cdot\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

với $a>0$, $a\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của B khi $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

c) Tìm giá trị của a thỏa mãn $a\sqrt{a}-2\sqrt{a}=3B$.

d) Đặt $C=B(a-\sqrt{a}+1)$. So sánh C với 1.

e) Biết $D=\dfrac{16}{a}+\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{B}{D}$.

Bài 24 (Sở GD&ĐT Hà Nội, năm 2018-2019). Cho hai biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \text{ và } B=\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

với $x\geq 0$; $x\neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b) Chứng minh $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B}\geq\dfrac{x}{4}+5$.

Bài 25. Cho biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ $(x\geq 0,\ x\neq 4,\ x\neq 9)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính A khi $x=6-2\sqrt{5}$.

c) Tìm x khi $A=-\dfrac{1}{3}$.

d) Tìm x để $A>0$.

e) Tìm x để $A<1$.

f) Tìm x để $A\cdot\sqrt{x}=-1$.

g) Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$.

h) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{A}$.

i) Tìm $x\in\mathbb{N}$ để A là số nguyên dương lớn nhất.

j) Khi $A+|A|=0$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A\cdot\sqrt{x}$.

Bài 26. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+3}{x-9}\right) : \left(\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$ $(x \geq 0,\ x \neq 9)$.

a) Rút gọn A.

b) Với x thỏa mãn $A \cdot (\sqrt{x}-1) = 1$, hãy tính A.

c) Tìm x khi $A = -\dfrac{1}{2}$.

d) Tìm x để $A < -\dfrac{1}{3}$.

e) Tìm x để $A > -1$.

f) Tìm x để $A \cdot (\sqrt{x}-2) = -2$.

g) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{x+7}{A}$.

Bài 27. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x-\sqrt{x}+7}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{6\sqrt{x}}{x-4}\right)$ $(x > 0,\ x \neq 4)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x^2 - 5x + 4 = 0$.

c) Tìm x khi $A = 3$.

d) Tìm x để $A > 5$.

e) Tìm x để $A < \sqrt{A}$.

f) Tìm x để $A = \dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$.

g) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{1}{A}$.

Bài 28. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1\right) : \left(\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$ $(x > 0,\ x \neq 4,\ x \neq 9)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

c) Tìm x khi $A = 3$.

d) Tìm x để $A > 1$.

e) Tìm x để $A < \sqrt{x}$.

f) Tìm x để $A + |A| = 0$.

g) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

h) Tìm giá trị nguyên âm lớn nhất của A.

i) Giả sử tồn tại $\sqrt{A}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x+5)A$.

Bài 29. Cho biểu thức $A = \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ $(x \geq 0,\ x \neq 1)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$.

c) Tìm x khi $A = 1$.

d) Tìm x để $A < \dfrac{1}{3}$.

e) Tìm x để $A > \dfrac{2}{5}$.

f) So sánh A và $\sqrt{A}$.

g) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Q}$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Bài 30. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$. $(x \geq 0,\ x \neq 1)$

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x-3\sqrt{x}+2=0$.

c) Tìm x khi $A=\frac{1}{4}$.

d) Tìm x để $A<\frac{1}{3}$.

e) Tìm x để $A>\frac{1}{5}$.

f) So sánh A và $\sqrt{A}$.

g) Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$.

h) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A(\sqrt{x}+3)$.

Bài 31. Cho biểu thức $A=\left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25}-1\right):\left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}+\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}\right)$. $(x\geq 0,\ x\neq 9,\ x\neq 25)$

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x-5\sqrt{x}+6=0$.

c) Tìm x khi $A=1$.

d) Tìm x khi $A=\frac{\sqrt{x}}{2}$.

e) So sánh A và 5.

f) Tìm x để $A<3$.

g) Tìm x để $A>2$.

h) Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$.

i) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A(\sqrt{x}+5)$.

Bài 32 (Đề thi vào 10 môn toán chuyên, tỉnh Kiên Giang, năm 2018). Cho biểu thức $A=\left(\frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}-\frac{x}{x-2\sqrt{x}}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ (với $x>0; x\neq 1; x\neq 4$).

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x=23-8\sqrt{7}$.

c) Tính A với x thỏa mãn $x-3\sqrt{x}+2=0$.

d) Tìm x khi $A=-\frac{1}{4}$.

e) Tìm x để $A<-\frac{1}{3}$.

f) Tìm x để $A>-4$.

g) So sánh A và -2.

h) Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$.

i) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A(\sqrt{x}+3)$.

Bài 33 (Đề thi vào 10, chuyên Vĩnh Long, tỉnh Vĩnh Long, năm 2018). Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right):\frac{1}{\sqrt{x}}$ (với $x>0$ và $x\neq 4$).

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x=14+6\sqrt{5}$.

c) Tính A với x thỏa mãn $2x-\sqrt{x}-3=0$.

d) Tìm x khi $A=\frac{1}{7}$.

e) Tìm x để $A>\frac{1}{5}$.

f) Tìm x để $A<\frac{\sqrt{x}}{12}$.

g) So sánh A và $\sqrt{A}$.

h) Tìm số chính phương x để $A\in\mathbb{Z}$.

i) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Bài 34 (Đề thi tuyển sinh vào 10 toán chuyên, tỉnh Bắc Giang, năm 2018). Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ (với $x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn A.

b) Tính A với x thỏa mãn $x = 17 - 12\sqrt{2}$.

c) Tính A với x thỏa mãn $2x - 3\sqrt{x} - 5 = 0$.

d) Tìm x khi $A = 3$.

e) Tìm x để $A > 2$.

f) Tìm x để $A < \dfrac{\sqrt{x}+3}{2}$.

g) So sánh A và $\sqrt{A}$.

h) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

i) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A + (4\sqrt{x} - 3)$.

j) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Bài 35. Cho biểu thức $C = \left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

a) Rút gọn C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $x = 8 - 2\sqrt{7}$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C bằng -3.

d) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$.

e) Tìm giá trị của x để giá trị biểu thức C nhỏ hơn $2\sqrt{x} + 3$.

Bài 36. Cho hai biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{x+1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $P = A \cdot B$. So sánh giá trị của biểu thức P và 1.

Bài 37. Cho biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt{x}}$, $B = \dfrac{x+3}{x-9} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \dfrac{4}{9}$.

b) Rút gọn B.

c) Cho $P = \dfrac{B}{A}$, tìm x để $P < 3$.

Bài 38.

a) Rút gọn biểu thức $N = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$ (với $a > 0$ và $a \neq 1$; $a \neq 4$).

b) Với $S = \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot N$. Chứng minh rằng $S < 1$.

c) Tính S tại $a = 3 - 2\sqrt{2}$.

d) Tìm a để $S < \sqrt{a}$.

e) Tìm m để $S \cdot m = 3$ có nghiệm.

f) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $S \in \mathbb{Z}$.

Bài 39.

a) Rút gọn biểu thức $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$; $x \neq 4$).

b) Với $M = (\sqrt{x}+1) \cdot B$. So sánh $\dfrac{1}{M}$ với 1.

c) Tìm x để $M < 4$.

d) Tính M tại $x = 6 + 4\sqrt{2}$.

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = M \cdot \sqrt{x}$ với $x > 4$.

f) Tìm m để phương trình $M \cdot m = 1$ có nghiệm.

Bài 40. Cho hai biểu thức: $A = \dfrac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{3} + 1\right)$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

b) Rút gọn B.

c) Đặt $M = A \cdot B$. So sánh M và $\sqrt{M}$.

Bài 41. Cho các biểu thức: $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} - 1\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức của B khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm m để phương trình ẩn x sau có nghiệm: $A(\sqrt{x}+2) = m - x$.

Bài 42. Cho biểu thức $A = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1\right)$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $M = B \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1} + \dfrac{x-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$. Tìm x nguyên để giá trị biểu thức M nguyên.

Bài 43. Cho các biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{x-4\sqrt{x}-9}{9-x}$; $Q = \dfrac{\sqrt{x}+5}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho $P = 3$.

c) Đặt $M = P : Q$. Tìm giá trị của x để $|M| < \dfrac{1}{2}$.

Bài 44. Cho các biểu thức $A = \dfrac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của B khi $x = 4\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)$.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm các số nguyên x để $\sqrt{AB} < \dfrac{2}{3}$.

Bài 45 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Kiên Giang). Rút gọn biểu thức sau

$$X = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Bài 46 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Quảng Ninh). Rút gọn biểu thức

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$$

.

Bài 47. Đặt $m = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $(m^3+3m-1)^{100}$.

Bài 48 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Hà Giang). Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A = (x^4 - x^3 - x^2 +$

Bài 49 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Tuyên Quang). Cho $x = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$. Tính $P = (1+5x^{2015}-x^{2017})^{2018}$.

Bài 50 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Tây Ninh). Cho $x = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức $A = (77x^2+35x+646)^{2017}$.

Bài 51 (Đề HSG Toán 9 năm 2017, Hải Phòng). Cho $x = \dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (12x^2+4x-55)^{2017}$.

Bài 52 (Đề HSG Toán 9 năm 2013, Hà Tĩnh). Tính giá trị của biểu thức $M = (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1)$ biết

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}};\ y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Bài 53. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)}$, với $a > 0$.

Bài 54 (Đề thi vào chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2012, vòng 1). Cho biểu thức
$P = \left(\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right) \cdot \dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ với $a > b > 0$. Rút gọn biểu thức P.

Bài 55 (Đề thi vào Chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2013, vòng 1). Cho biểu thức

$$Q = \frac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; b > 0; a \neq b.$$

Chứng minh rằng giá trị biểu thức Q không phụ thuộc vào a, b.

Bài 56 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Bắc Ninh). Rút gọn biểu thức
$P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ với điều kiện $x \geq 2$.

Bài 57 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Đồng Nai). Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa $ab+bc+ca = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a\cdot\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\cdot\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\cdot\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

Bài 58 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Hải Dương). Cho $A = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$.
Rút gọn biểu thức $B = 1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}$.

Bài 59 (Đề HSG Toán 9 năm 2013, Đà Nẵng). Cho biểu thức
$P = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} + \dfrac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3} - \dfrac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$. Rút gọn biểu thức $Q = \dfrac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$.

Bài 60 (Đề HSG Toán 9 năm 2013, Hải Dương). Cho biểu thức
$A = \dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$. Rút gọn A. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 61 (Đề thi vào lớp 10 Chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 2015, Vòng 2). Cho $a \geq 0$, $a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right].$$

Bài 62 (Đề thi TS 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2010 - 2011, vòng 2). Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2 +$ là một số nguyên dương.

Bài 63 (Đề HSG Toán 9 năm 2013, Quảng Ninh). Chứng minh đẳng thức
$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{9}} + \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$.

Bài 64 (Đề thi TS 10 chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2010 - 2011, vòng 2). Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn $a-b = \sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2 = 1$.

Bài 65 (Đề HSG Toán 9 năm 2018, Hưng Yên). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2018}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}.$$

Bài 66. Cho biểu thức:
$A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \dfrac{2-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{2}{x-1}\right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi:

a) $x = 6 - 4\sqrt{2}$;

b) $x = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}\right)$;

c) $x = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$;

d) $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$;

e) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3x-5} = x-1$;

f) x là nghiệm của phương trình $|2x-6| = 3x+1$;

g) x là giá trị làm cho biểu thức $M = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm x để:

a) $A = \dfrac{1}{6}$; b) $|A| = A$; c) $A^2 + A \leq 0$.

d) So sánh:

a) A với 1; b) A với biểu thức $N = \dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$.

e) Tìm x nguyên dương để biểu thức $\dfrac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.

f) Tìm x thực để A nhận giá trị nguyên.

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $P = A(x - \sqrt{x} - 2)$; b) $Q = \dfrac{A}{-x+3\sqrt{x}-2}$ với $0 \leq x < 4$; c) $R = \dfrac{\sqrt{x}}{A}$ với $x > 1$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $B = 2 - A$; b) $C = \dfrac{A}{\sqrt{x}+7}$ với $x > 1$.

i) Tìm x thỏa mãn $A(\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{6}-1)\sqrt{x} = 2x - 2\sqrt{x-5} + 1$.

Bài 67. Cho biểu thức:

$$B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi:

a) $x = 7 - \sqrt{48}$;

b) $x = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

c) $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

d) $x = \dfrac{1}{1+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{100}}$;

e) x là nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2-x+2} = x$;

f) x là nghiệm phương trình $|x-1| = |2x-5|$;

g) x là giá trị làm cho biểu thức $P = x - 4\sqrt{x} + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm x để:

a) $B = 0$;   b) $B + \dfrac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} \leq 0$.

d) So sánh:

a) B với -2;   b) B với $C = \dfrac{\sqrt{x} - 3x}{x}$.

e) Tìm x để B nhận giá trị nguyên.

f) Xét dấu biểu thức $T = B(\sqrt{x} - 1)$.

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) B;   b) $\mathscr{D} = B\sqrt{x}$;   c) $E = \dfrac{B}{\sqrt{x}}$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $G = -3 - B$;   b) $Q = 1 - B\sqrt{x}$.

i) Tìm x thỏa mãn $B\sqrt{x} + (2\sqrt{3} + 3)\sqrt{x} = 3x - 4\sqrt{x+1} + 10$.

Bài 68. Cho biểu thức

$C = \left(\dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x} + 4} + \dfrac{2x}{4 - x}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}}\right)$ với $x > 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi:

a) $x = 6 - 2\sqrt{8}$;

b) $x = \sqrt{11 + 3\sqrt{8}} + \sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$;

c) $x = \sqrt[3]{14\sqrt{2} + 20} - \sqrt[3]{14\sqrt{2} - 20} - 1$;

d) $x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{81}}$;

e) x là nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 - x} = x - 1$;

f) x là nghiệm của phương trình: $|x - 3| = 3$;

g) x là giá trị làm cho biểu thức $M = -x + 3\sqrt{x} + 5$ đạt giá trị lớn nhất.

c) Tìm x để:

a) $C^2 \leq 0$;   b) $|C| = -C$.

d) So sánh C với biểu thức $\mathscr{D} = \sqrt{x}$ khi $x > 9$.

e) Tìm x để biểu thức $E = \dfrac{2C}{\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên.

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của:

(a) Biểu thức C với $x > 9$;

(b) Biểu thức $I = -\dfrac{C}{x\sqrt{x}}$ với $0 < x < 9, x \neq 4$.

g) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = \dfrac{C}{\sqrt{x} - 1 + C}$.

h) Tìm x thỏa mãn $(2\sqrt{2} + C)\sqrt{x} - 3C = 3x - 2\sqrt{x-1} + 2$.

BÀI 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng $ax + by = c$ trong đó x, y là ẩn; a, b, c là các số cho trước, a và b không đồng thời bằng 0.

2) Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm $(x; y)$. Công thức nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{c - at}{b} \text{ với } b \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{c - bt}{a} \text{ với } a \neq 0 \\ y = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chú ý: Phương trình $ax + by = c$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi c chia hết cho ƯCLN$(a; b)$.

3) Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng:

$$(I)\ \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

trong đó a và b cũng như a' và b' không đồng thời bằng 0.
Với $a'b'c' = 0$ ta dễ dàng đưa được về các trường hợp đặc biệt đã biết.
Với $a'b'c' \neq 0$ thì:

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$.
- Hệ (I) vô nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$.
- Hệ (I) có vô số nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

4) Các phương pháp giải hệ phương trình:

a) Phương pháp thế

- Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

b) Phương pháp cộng đại số

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Biểu thị một ẩn (giả sử ẩn x) theo ẩn còn lại (ẩn y) từ một trong các phương trình của hệ.

Bước 2. Thay biểu thức của x vào phương trình còn lại rồi tìm giá trị của y.

Bước 3. Thay giá trị y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

Bước 4. Kết luận nghiệm của hệ phương trình

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5}. \end{cases}$

Lời giải.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + 4y = 10. \end{cases}$

Lời giải.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = 1 \\ x + \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{2}. \end{cases}$

Lời giải.

Dạng 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nhân cả hai vế của các phương trình trong hệ với số thích hợp (nếu cần) để đưa hệ đã cho về hệ mới, trong đó các hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau (hoặc đối nhau).

Bước 2. Trừ (hoặc cộng) từng vế của các phương trình trong hệ mới để khử bớt một ẩn.

Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được.

Bước 4. Thay giá trị tìm được của ẩn này vào một trong các phương trình của hệ để tìm ẩn còn lại.

Bước 5. Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 4. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 4\sqrt{6}. \end{cases}$

Lời giải.

Ví dụ 5. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 3x + 2y = 32. \end{cases}$

Lời giải.

Ví dụ 6. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right) x + \left(\sqrt{3}-1\right) y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải.

Dạng 3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 7. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = -1; \end{cases}$
b) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} - \dfrac{6}{x+y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x-y} - \dfrac{1}{x+y} = 0; \end{cases}$
c) $\begin{cases} \dfrac{5x}{x+1} + \dfrac{y}{y-3} = 27 \\ \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3y}{y-3} = 4. \end{cases}$

Lời giải.

Ví dụ 8. Giải các hệ phương trình.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5. \end{cases}$
b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{y-1} = 2 \\ \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y-1} = 1. \end{cases}$
c) $\begin{cases} \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1 \\ \dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{5y} = \dfrac{2}{15}. \end{cases}$

Lời giải.

Dạng 4. Hệ phương trình chứa tham số

Ví dụ 9. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ (5m+2)x + 3y = m - 2. & (2) \end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases} 3x + my = 2 & (1) \\ x + (3m-2)y = m. & (2) \end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Ví dụ 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Ví dụ 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + 2y = 0. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ vô nghiệm.

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3my = 2 \\ 2m^2x + 6m^2y = m. \end{cases}$
Chứng minh rằng hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Ví dụ 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + \sqrt{2}y = m. \end{cases}$
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có vô số nghiệm.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + (m^2+1)y = 5m - 10 \\ -9x + (-3m^2 - 3)y = -15m + 30. \end{cases}$
Chứng minh rằng hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho hệ phương $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1\\x+(a-1)y=2\end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số a sao cho hệ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Ví dụ 17. Cho hệ phương $\begin{cases}2x+(a-2)y=a+1\\(a+2)x-2y=3\end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho hệ có nghiệm duy nhất. Trong các giá trị đó, tìm giá trị của a để tổng $x+y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 5 \\ 12x + 13y = -8. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5(x + 2y) = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3(x - 5y) - 12. \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{5}x - y = \sqrt{5}(\sqrt{3} - 1) \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = 21. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1{,}7x - 2y = 3{,}8 \\ 2{,}1x + 5y = 0{,}4. \end{cases}$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

a) $\begin{cases} \dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{y} = 9 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 35. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{7}{x - y + 2} - \dfrac{5}{x + y - 1} = 4{,}5 \\ \dfrac{3}{x - y + 2} + \dfrac{2}{x + y - 1} = 4. \end{cases}$

Bài 4. Biện luận theo a hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (2a + 1)x - y = 2 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Bài 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m+2). \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -1$;

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$;

b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y+1} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y+1} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{x+2y} = 5 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+2y} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+1} + \dfrac{9}{y-1} = -1 \\ \dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{2}{y-1} = \dfrac{13}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} - \dfrac{y-2}{y+2} = 1 \\ \dfrac{3x-3}{2x+1} + \dfrac{2y-4}{y+2} = 3 \end{cases}$

Bài 8. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{y+2} = 3 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{2}{y+2} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \sqrt{y+2} = 3 \\ \dfrac{-2}{x+y} + 5\sqrt{y+2} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{1-x-y}{x+y} = \dfrac{22}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{5+x+y}{x+y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2x+1}} + \dfrac{3}{\sqrt{y-2}} = 5 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{y-2}} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x+2| + 4\sqrt{y-1} = 3 \\ 3\,|x+2| - 2\sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$

Bài 9. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2}{y+2} = 4 \\ \dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{1}{y-1} = 5 \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\,(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x - |y+2| = 3 \\ x + 2|y+2| = 3 \end{cases}$

Bài 10 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Ninh, 2016). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 0$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) sao cho x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (3m - 1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ với t là ẩn số.

Bài 11 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lào Cai, 2016). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = m \end{cases} \quad (I)$$

.

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m = -1$.

b) Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > y$.

Bài 12 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Phúc, 2016). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$$

với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 2$.

Bài 13 (Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Thái Bình). Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m^2 - \\ x - y = -4 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ với $m = 3$.

b) Chứng minh rằng với $m \neq -1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$. Khi đó tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^2 - 2y + 10$.

Bài 14. Cho hệ phương trình với tham số m sau đây

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Bài 15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào giá trị của m.

Bài 16 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2018 - 2019, Lào Cai). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases} \qquad (*)$$

với a là tham số.

a) Giải hệ phương trình $(*)$ khi $a = 1$.

b) Tìm a để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\dfrac{2y}{x^2+3}$ là số nguyên.

Bài 17 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2016 - 2017, Bắc Ninh). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 0$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) sao cho x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (3m-1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ với t là ẩn số.

Bài 18 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2016 - 2017, Vĩnh Phúc). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$$

với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 2$.

Bài 19 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2016 - 2017, Lào Cai). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = m. \end{cases} \quad (I)$$

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m = -1$.

b) Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > y$.

Bài 20 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2017 - 2018, Cà Mau). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = m \\ mx + y = 1. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đường thẳng $y = -mx + 1$ tại một điểm nằm trên parabol $y = -2x^2$.

Bài 21 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2014 - 2015, Hải Dương). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3m + 2 \\ 3x - 2y = 11 - m. \end{cases}$$

Tìm m để hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 22 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2014 - 2015, Thái Bình). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x \geq 2$, $y \geq 1$.

Bài 23 (Đề thi vào lớp 10 năm học 2007 - 2008, Đà Nẵng). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m+1)x - y = 3 \\ mx + y = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -2$.

b) Xác định tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

Bài 24. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 1 \\ ax + by = -5 \end{cases}$, trong đó a, b là tham số thực.

a) Giải hệ phương trình trong trường hợp $a = 2$ và $b = 3$.

b) Giải và biện luận nghiệm của hệ phương trình theo a và b.

Bài 25 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2017-2018, Vĩnh Phúc). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m+2) \end{cases} \quad (1),$$

với m là tham số thực.

a) Giải hệ (1) với $m = 2$.

b) Tìm tất các giá trị của m để hệ (1) có nghiệm duy nhất.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$, trong đó $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1).

Bài 26. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 5 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ (1), với m là tham số thực.

a) Giải hệ (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ (1) có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x - y + \frac{m+1}{m-2} = -4. \quad (*)$$

Bài 27. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 4 \\ mx - y = 3 \end{cases}$ (1), với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để hệ (1) có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$ và $y > 0$.

Bài 28 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm 2013-2014, Hải Phòng). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = m + 3 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \quad (1),$$

với m là tham số thực.

a) Giải hệ (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị m để hệ (1) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = -3$.

Bài 29 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm 2013-2014, Lào Cai). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases} \quad (1),$$

với m là tham số thực.

a) Giải hệ (1) khi $m=2$.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì hệ (1) luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $2x+y \le 3$.

Bài 30 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm 2014-2015, Hòa Bình). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+y=5m-1\\ x-2y=2\end{cases},$$

với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-2y^2=-2$.

Bài 31. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x+my=2m-1\\ mx-y=m^2-2\end{cases}$ với x là ẩn và m là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;-1)$.

3) Chứng minh hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

4) Với $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ, tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

5) Gọi $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm m để

   a. $\sqrt{2x+1}=y$;

   b. $|x-y|=4-m$;

   c. $|x|=2|y|$;

   d. Biểu thức $P=xy$ đạt giá trị lớn nhất.

   e. Đồng thời m và biểu thức $Q=\dfrac{x}{y}$ cùng nhận giá trị nguyên.

6) Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét điểm $M(x;y)$ trong đó $(x;y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình, hãy

   a. Chứng minh M luôn thuộc một đường thẳng cố định;

   b. Tìm m để M nằm trên đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1;

   c. Tìm m để M thuộc góc phần tư thứ nhất;

   d. Tìm m để ba điểm $M, A(1;3)$ và $B(0;1)$ thẳng hàng;

   e. Tìm m để chu vi hình chữ nhật $OHMK$ có giá trị nhỏ nhất trong đó H, K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox, Oy.

7) Cho các đường thẳng
$d_1\colon (m+1)x+my=2m-1$, $d_2\colon mx-y=m^2-2$, $d_3\colon 3x+y-1=0$.
Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy.

Bài 32. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+2my=m+1\\ x+(m+1)y=2\end{cases}$ với x là ẩn và m là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi $m = -3$.

2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -1)$.

3) Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

4) Với x, y là nghiệm duy nhất của hệ, tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

5) Gọi $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy tìm m để

   a. $x^2 + y^2 = 2$;

   b. $\sqrt{2mx + 1} = \dfrac{1}{y}$;

   c. $|x - 2y| = 5$;

   d. $y \leq 2x - 1$;

   e. Biểu thức $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

   f. Đồng thời m và $(x; y)$ cùng nhận giá trị nguyên.

6) Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét điểm $M(x; y)$ trong đó $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Hãy

   a. Chứng minh điểm $M(x; y)$ luôn thuộc một đường thẳng cố định;

   b. Tìm m để điểm $M(x; y)$ thuộc góc phần tư thứ ba;

   c. Tìm m để ba điểm $M(x; y), A(1; 2), C(-1; -4)$ thẳng hàng;

   d. Tìm m để $AB = 1$ trong đó A, B lần lượt là hình chiếu của $M(x; y)$ lên các trục tọa độ Ox và Oy.

7) Cho các đường thẳng:
   $d_1\colon mx + 2my = m + 1$, $d_2\colon x + (m + 1)y = 2$, $d_3\colon 2x - y = 1$.
   Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) *Phương trình bậc hai một ẩn* là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

trong đó x là ẩn; a, b, c là các số cho trước.

2) Công thức nghiệm:

Công thức nghiệm tổng quát	*Công thức nghiệm thu gọn*
Bước 1: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ *Bước 2:* Xét dấu của Δ - Nếu $\Delta < 0$ thì (1) vô nghiệm. - Nếu $\Delta = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. - Nếu $\Delta > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.	*Bước 1:* Tính $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$ *Bước 2:* Xét dấu của Δ' - Nếu $\Delta' < 0$ thì (1) vô nghiệm. - Nếu $\Delta' = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$. - Nếu $\Delta' > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

3) Hệ thức Vi-ét và ứng dụng:

- Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$
- Đảo lại, nếu có hai số x_1, x_2 mà $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases}$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Áp dụng:

- Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:
  - Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
  - Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.
- Tính giá trị của biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu các nghiệm mà không cần giải phương trình (nếu phương trình có nghiệm):
  - $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{2c}{a}$.
  - $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\dfrac{b}{a} : \dfrac{c}{a} = -\dfrac{b}{c}$.
  - Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a \cdot c < 0$.

— Phương trình (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0. \end{cases}$

— Phương trình (1) có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0. \end{cases}$

4) Giải phương trình quy về phương trình bậc hai:
Cách 1: Đưa về phương trình tích.
Cách 2: Đặt ẩn phụ.

5) Giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:
Ta có thể khử dấu giá trị tuyệt đối bằng hai cách:
Cách 1: Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Cách 2: Bình phương hai vế của phương trình.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng công thức nghiệm, hoặc công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Để giải phương trình bậc hai ta cần xác định các hệ số a, b, c, b' và sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình.

Ví dụ 1. Xác định các hệ số a, b, c; tính biệt thức Δ, từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$.
b) $-2x^2 + x + 1 = 0$.
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$.
d) $x^2 - x + 4 = 0$.
e) $x^2 - x - 2 = 0$.
f) $-x^2 - 5x + 6 = 0$.
g) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
h) $x^2 - 3x + 4 = 0$.
i) $2x^2 - 2x + 0{,}5 = 0$.
j) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.
k) $x^2 - \sqrt{3}x = -1$.
l) $\sqrt{2}(x^2 - 2) = 4x$.

Ví dụ 2. Xác định các hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ', từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$.
b) $-4x^2 + 4x + 1 = 0$.

c) $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$.

d) $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0$.

e) $x^2 - 6x + 5 = 0$.

f) $-3x^2 - 4x + 2 = 0$.

g) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$.

h) $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$.

Dạng 2. Xác định số nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình dạng bậc hai :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \text{ (hoặc } \Delta' > 0) \end{cases}$

b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \text{ (hoặc } \Delta' = 0) \end{cases}$

c) Phương trình có đúng một nghiệm : $a = 0,\ b \neq 0$.

d) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0 \\ a \neq 0,\ \Delta < 0 \text{ (hoặc } \Delta' < 0). \end{array}\right.$

Ví dụ 3. Cho phương trình $mx^2 - 3x + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt.

b) Có nghiệm kép.

c) Vô nghiệm.

d) Có đúng một nghiệm.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho phương trình $mx^2 - 6x - 1 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt.

b) Có nghiệm kép.

c) Vô nghiệm.

d) Có đúng một nghiệm.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$ Từ đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ và $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Bước 2. Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2, sau đó áp dụng bước 1.

Ví dụ 5. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_x^2$.

c) $C = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

d) $D = \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^2 x_2 + x_1 x_x^2$.

c) $C = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

d) $D = \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$.

Lời giải.

Ví dụ 7 (Đề thi TS Bình Dương 2020). Cho phương trình $x^2 - 2020x + 2021 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$;

b) $x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Cho phương trình $x^2 + 3x + 1 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2}{4x_1^2x_2 + 4x_2^2x_1}$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm không âm x_1, x_2.

b) Tính $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

Lời giải.

Ví dụ 10 (TS 10 Nghệ An 2021). Cho phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Lời giải.

Dạng 4. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$, ta làm như sau

Bước 1. Giải phương trình $X^2 - Sx + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2.

Bước 2. Suy ra các số x, y cần tìm là $x = X_1$, $y = X_2$ hoặc $x = X_2$, $y = X_1$.

Ví dụ 11. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u+v=5$ và $uv=-14$.

b) $u+v=5$ và $uv=-24$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u+v=-6$ và $uv=-16$.

b) $u+v=1$ và $uv=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho phương trình $x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ và $x_1^2+x_2^2$.

Lời giải.

Ví dụ 14. Cho phương trình $x^2-4x+2=0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Lời giải.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$. Khi đó

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.
2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0. \end{cases}$
3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$
4. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Ví dụ 15. Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm phân biệt.

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

d) Có hai nghiệm dương phân biệt.

e) Có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 16. Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm phân biệt.

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

d) Có hai nghiệm dương phân biệt.

e) Có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải.

Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước

Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

Bước 2. Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét, tìm được điều kiện của tham số.

Ví dụ 17 (Đề thi TS Cần Thơ 2020). Tìm tất cả giá trị của m sao cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 3m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7(x_1 + x_2) - 12$.

Lời giải.

Ví dụ 18 (Đề thi TS Bình Phước 2020). Cho phương trình ẩn x là $x^2 - 5x + (m-2) = 0 \quad (1)$. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Ví dụ 19 (Đề Thi TS Đắk Nông 2020). Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+3m-1=0$, (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^2+x_2^2=10$.

Lời giải.

Ví dụ 20 (TS 10 Lạng Sơn 2020). Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$.

Lời giải.

Ví dụ 21 (TS 10 Bình Phước 2018). Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$\left(x_1^2 - 2mx_1 + 3\right)\left(x_2^2 - 2mx_2 - 2\right) = 50.$$

Lời giải.

Dạng 7. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số

- Điều kiện để phương trình có nghiệm: $\Delta \geq 0$.
- Sử dụng hệ thức Vi-ét, tính tổng và tích hai nghiệm theo tham số.
- Khử tham số bằng một trong các cách:
  - Phương pháp thế.
  - Phương pháp cộng đại số.
  - Phương pháp rút tham số.
  - Phương pháp biến đổi.

Ví dụ 22. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc tham số m.

Lời giải.

Ví dụ 23. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$. Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc tham số m.

Ví dụ 24. Cho phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$. Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc tham số m.

Dạng 8. Vận dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc hai trong bài toán tìm GTLN, GTNN

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ với $mx^2 + nx + p > 0$, $\forall x$.

Phương pháp:
Gọi y_0 là một giá trị của biểu thức. Khi đó

$$y_0 = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} \Leftrightarrow (y_0 m - a)x^2 + (y_0 n - b)x + y_0 p - c. \qquad (*)$$

Ta xét 2 trường hợp

- Nếu $y_0 m - a = 0 \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{a}{m}$, thay vào $(*)$ ta tìm được x
  Suy ra $y_0 = \dfrac{a}{m}$ là một giá trị của biểu thức.
- Nếu $y_0 m - a \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq \dfrac{a}{m}$ thì $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x. Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$.
  Từ đó ta suy ra điều kiện của y_0. Trên cơ sở đó ta tìm được GTLN, GTNN (nếu có) của biểu thức.

Ví dụ 25. Tìm GTLN,GTNN của các biểu thức:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$.

b) $P = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$.

c) $A = \dfrac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$ với $y \neq 0$.

d) $A = \dfrac{2x^2 + 12xy}{1 + 2xy + 2y^2}$ biết $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 26. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$. Tìm GTLN, GTNN của x.

Lời giải.

Ví dụ 27. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.
Tìm GTLN của biểu thức $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

Lời giải.

Ví dụ 28. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng $a+ab+2abc \leq \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Dạng 9. Một số bài toán tổng hợp

Ví dụ 29. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 \quad (1)$.

1) Giải (1) với $m = 0$.
2) Chứng minh rằng với mọi m thì (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
3) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.
4) Với $m \neq 3$ hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.
5) Với mỗi số tự nhiên n, đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Chứng minh rằng:
$$S_{n+2} - 2(m-1)S_{n+1} + (m-3)S_n = 0$$
.
6) Đặt $A = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2}$, với $m \neq 1, m \neq 3$. Tìm số nguyên m để A là số nguyên.
7) Tìm số nguyên m để x_1, x_2 là số nguyên.
8) Tìm m để (1)
   (a) Có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.
   (b) Có hai nghiệm trái dấu.
   (c) Có hai nghiệm cùng dấu, hãy tính $B = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ theo m.
   (d) Có nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.
   (e) Có hai nghiệm thoả mãn $x_1^2 - x_2^2 = -4m^2 + 16m - 12$.
   (f) Có hai nghiệm thoả mãn $x_1 < x_2 < 1$.
   (g) Có hai nghiệm sao cho $x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
   (h) Có nghiệm chung với phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \quad (2)$.

Lời giải.

Ví dụ 30. Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + 3m - 5 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

b) Tìm m để hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{23}$.

c) Tìm m để hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có diện tích là 2.

d) Tìm m để hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 - x_2 = 9$.

Lời giải.

Ví dụ 31. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+2m+4=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) nhận $x=1-\sqrt{2}$ là một nghiệm.

c) Chứng minh rằng với mọi m, phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2.

d) Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $x_1^2+(m+5)x_2-m^2-8m$ là một hằng số không phụ thuộc vào m.

Lời giải.

Ví dụ 32. Cho phương trình: $x^2 - 3mx + 2m^2 + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1 - 1 = 2\sqrt{x_2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Lời giải.

Ví dụ 33. Cho phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ (*), với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = -10$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 nguyên không âm.

c) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $7x_1 + 3x_2 = 1$.

Lời giải.

Ví dụ 34. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị nguyên của tham số m để biểu thức $P = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

Ví dụ 35. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ với tham số m.

a) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho $|x_1| + |x_2| = 7$.

c) Tìm các giá trị của tham số m sao cho $|x_1 - x_2| = 7$.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN CỦNG CỐ

Bài 1 (Đề thi TS Đà Nẵng 2020). Biết rằng phương trình $x^2 - 19x + 7 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2, không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$P = x_2\left(2x_1^2 - 38x_1 + x_1x_2 - 3\right)^2 + x_1\left(2x_2^2 - 38x_2 + x_1x_2 - 3\right)^2 + 120.$$

Bài 2 (TS Đồng Nai 2020). Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm là $\left|x_1^3\right|, \left|x_2^3\right|$.

Bài 3. Không dùng công thức nghiệm để giải phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$.

a. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2)$, $B = \dfrac{x_1}{x_2 - 1} + \dfrac{x_2}{x_1 - 1}$.

Bài 4 (TS 10 Điện Biên 2020). Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0$ (m là tham số) (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.
2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}x_1^2 - (m-1)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 4059.$$

Bài 5 (TS 10 Hải Phòng 2020). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 \quad (1)$ (x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 7$.

b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6 (TS 10 Lào Cai 2020).

a) Giải phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = -3$.

Bài 7 (TS 10 Phú Thọ 2020). Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2x_2 + mx_2 - x_2 = 4$.

Bài 8 (TS 10 Quảng Ninh 2020). Cho phương trình $x^2 + 4x + 3m - 2 = 0$, với m là tham số.

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

Bài 9 (TS 10 Thanh Hoá 2020). Cho phương trình $x^2 + 5x + m - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{(x_1-1)^2} + \dfrac{1}{(x_2-1)^2} = 1$.

Bài 10 (TS 10 Bắc Giang 2018). Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0$ (1), với x là ẩn, m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Bài 11 (TS 10 Vũng Tàu 2018). Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 6$.

Bài 12 (TS 10 Bến Tre 2018). Cho phương trình $x^2 + 5x + m = 0$ $(*)$, (m là tham số).

a) Giải phương trình $(*)$ khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $9x_1 + 2x_2 = 18$.

Bài 13 (TS 10 Cao Bằng 2018). Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (với m là tham số). Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}.$$

Bài 14 (TS 10 Hải Dương 2018). Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1^3 - x_2^3| = 10\sqrt{2}$.

Bài 15 (TS 10 Lào Cai 2018). Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$$

Bài 16 (TS 10 Quảng Ngãi 2018). Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị nguyên của m để biểu thức $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 17 (TS 10 Bắc Kạn 2018). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(2m-2)x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 4$.

Bài 18 (TS 10 Thanh Hoá 2018). Cho phương trình $x^2 - (m-2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi m. Tìm m để các nghiệm đó thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2.$$

Bài 19 (TS 10 Trà Vinh 2018). Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm các số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 20 (TS 10 Bắc Ninh 2017). Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2$ và $x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2$ là nghiệm.

Bài 21 (TS 10 Bạc Liêu 2021). Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = -3$.

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi số thực m.

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông xuống cạnh huyền là $h = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 22 (TS 10 Cao Bằng 2021). Cho phương trình $(m^2 + m + 1)\,x^2 - (m^2 + 2m + 2)\,x - 1 = 0$ (m là tham số).
Giả sử x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình trên. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Bài 23 (TS 10 Nam Định 2021). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| = 3\,|x_2|$.

Bài 24 (TS 10 Bắc Kạn 2021). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0 \quad (1)$ (với m là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 2m^2 + 20$.

Bài 25 (TS 10 Đà Nẵng 2021). Cho phương trình $x^2 + 4(m-1)x - 12 = 0 \quad (*)$, với m là tham số.

a) Giải phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $4|x_1 - 2|\sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2$.

Bài 26 (Đề TS 10 2021 Thanh Hóa). Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^4 - x_1^3 = x_2^4 - x_2^3$.

Bài 27 (TS10 Chuyên Lào Cai 2021). Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (trong đó m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\left(x_1^2-2mx_1+2m-1\right)\left(x_2^2-2mx_2+2m-1\right)<0.$$

Bài 28 (TS10 Chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi 2021). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-5x+2m-2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2-4x_1+2m-2}+\sqrt{x_2}=3$.

Bài 29 (Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt Kiên Giang 2021). Tìm tất cả các số thực a, b sao cho phương trình (ẩn x) $x^2+ax+b=0$ có hai nghiệm là $\dfrac{a}{3}$ và $\dfrac{1}{a+2}$.

Bài 30 (Chuyên Lào Cai 2021). Cho hai phương trình

$$x^2-mx-2021=0 \qquad (1)$$

$$\text{và} \qquad x^2+(m-1)x-2022=0. \qquad (2)$$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và phương trình (2) có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)=1$.

Bài 31 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2021). Biết rằng phương trình $x^2-ax+b+2=0$ (với a, b là các số nguyên) có hai nghiệm đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $2a^2+b^2$ là hợp số.

Bài 32. Cho phương trình: $x^2-(2m+1)x+2m-4=0$ với x là ẩn, m là tham số.

1) Giải phương trình đã cho với $m=1$.

2) Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$. Tìm nghiệm còn lại.

3) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị bất kì của tham số m.

4) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để:

   a. $x_1^2+x_2^2=13$.

   b. $2x_1+3x_2=3$.

   c. $|x_1-x_2|=4$.

   d. $|x_1|+|x_2|=5$.

   e. Nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

5) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

6) Tìm các giá trị của m để phương trình:

   a. Có hai nghiệm trái dấu.

   b. Có hai nghiệm cùng âm.

   c. Có hai nghiệm cùng dương.

   d. Có hai nghiệm trái dấu, nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

   e. Có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1<1<x_2$.

7) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Xét biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+4$. Hãy:

a. Tính các giá trị của biểu thức A theo m.

b. Tìm các giá trị của m để $A = 41$.

c. Tìm các giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

8) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\dfrac{\sqrt{205}}{2}$.

9) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Với $m \neq 2$, lập phương trình có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ có tham số m.

Bài 33. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 2$.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

3) Tìm các giá trị của m để phương trình

a. Có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó;

b. Có nghiệm kép. Tìm nghiệm với m vừa tìm được;

c. Vô nghiệm.

4) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, tìm các giá trị của m để

a. $x_1^2 + x_2^2 = 8$;

b. $2x_1 - 3x_2 = 8$;

c. $|x_1 - x_2| = 4$;

d. $|x_1| + |x_2| = 3$.

5) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

a. x_1, x_2 trái dấu;

b. x_1, x_2 cùng dương;

c. x_1, x_2 cùng âm;

d. $(x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

6) Trong trường hợp phương trình có các nghiệm phân biệt x_1, x_2, hãy

a. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

b. Tìm các giá trị của m để $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) > 1$.

c. Với $m \neq 0$ và $m \neq 3$, lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}$.

Bài 34. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 2m = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

1) Tìm giá trị của m biết phương trình có một nghiệm là $x = 3$. Tìm nghiệm còn lại.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình

a. Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = 2$;

b. Có hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau;

c. Có hai nghiệm x_1, x_2 cùng dấu. Khi đó hai nghiệm cùng âm hay cùng dương.

d. Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $-3 < x_1 < x_2 \leq 3$.

3) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

a. Có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

b. Có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{13}$.

4) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$. theo tham số m.

b. Với $m \neq 0$, lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ và $x_1 + x_2$.

BÀI 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PT HOẶC HPT

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình gồm 3 bước:

Bước 1: Lập phương trình (hoặc hệ phương trình) của bài toán:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình (hoặc hệ phương trình) biểu thị mối quan hệ giữa các đai lượng.

Bước 2: Giải phương trình (hoặc hệ phương trình).

Bước 3: Kết luận: kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình (hoặc hệ phương trình), nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn và đưa ra kết luận.

Khó khăn của học sinh thường gặp là không biết biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và theo các đại lượng đã biết khác, tức là không thiết lập được mối quan hệ giữa các đại lượng. Tùy theo từng dạng bài tập mà ta xác định được các đại lượng có trong bài, các công thức biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng ấy.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán chuyển động

1. Toán chuyển động có ba đại lượng

   (1) Quãng đường $=$ Vận tốc $\times$ Thời gian.

   (2) Thời gian $=$ Quãng đường : Vận tốc.

   (3) Vận tốc $=$ Quãng đường : Thời gian.

2. Các đơn vị của ba đại lượng phải phù hợp với nhau: nếu quãng đường tính bằng ki-lô-mét, vận tốc tính bằng ki-lô-mét/giờ thì thời gian phải tính bằng giờ.

Ví dụ 1. Lúc 6 giờ một ô tô chạy từ A về B. Sau đó nửa giờ, một xe máy chạy từ B về A. Ô tô gặp xe máy lúc 8 giờ. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/giờ và khoảng cách AB là 195 km. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2 (TS 10 Cao Bằng 2020). Bác An đi xe ô tô từ Cao Bằng đến Hải Phòng. Sau khi đi được nửa quãng đường, Bác An cho xe tăng vận tốc thêm 5 km/h nên thời gian đi nửa quãng đường sau ít hơn thời gian đi nửa quãng đường đầu là 30 phút. Hỏi lúc đầu bác An đi với vận tốc bao nhiêu. Biết rằng khoảng cách từ Cao Bằng đến Hải Phòng là 360 km.

Lời giải.

Ví dụ 3 (TS 10 Đà Nẵng 2020). Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc và một đoạn xuống dốc. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 16 phút và đi từ B về A hết 14 phút. Biết vận tốc lúc lên dốc là 10 km/h, vận tốc lúc xuống dốc là 15 km/h (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và lúc về như nhau). Tính độ dài quãng đường AB.

Lời giải.

Ví dụ 4 (TS 10 Đồng Tháp 2020). Nhà Lan cách trường học 5 km, nhà bạn Mai cách trường học 4 km. Mai bắt đầu đi học sớm hơn Lan 5 phút và hai bạn gặp nhau tại cổng trường lúc 6 giờ 50 phút sáng. Biết rằng vận tốc đi xe của bạn Lan lớn hơn vận tốc đi xe của bạn Mai 8 km/h. Hỏi Mai bắt đầu đi học lúc mấy giờ?

Lời giải.

Ví dụ 5 (TS 10 Gia Lai 2020). Quãng đường từ A đến B dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ A đi đến B và một ô tô khởi hành từ B đi đến A. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến B. Giả sử vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi. Biết vận tốc của xe máy nhỏ hơn vận tốc của xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Ví dụ 6. Một tàu thủy chạy xuôi dòng sông 66 km hết một thời gian bằng thời gian tàu đó chạy ngược dòng 54 km. Nếu tàu chạy xuôi dòng 22 km và ngược dòng 9 km thì chỉ hết 1 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy và vận tốc của dòng nước (biết rằng vận tốc riêng của tàu là không đổi).

Lời giải.

Ví dụ 7 (TS 10 Quảng Ninh 2020). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 32 km. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lập tức quay về bến A. Kể từ lúc khởi hành đến lúc về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Dạng 2. Bài toán năng suất

Toán năng suất bao gồm ba đại lượng

(1) Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian.

(2) Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.

(3) Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

Ví dụ 8. Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất 280 sản phẩm với năng suất định trước. Do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 10 sản phẩm nên tổ đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 1 ngày và còn sản xuất thêm được 20 sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Lời giải.

Ví dụ 9 (TS 10 Hải Phòng 2020). Một nhà máy theo kế hoạch phải sản xuất 2100 thùng nước sát khuẩn trong một thời gian quy định (số thùng nước sát khuẩn nhà máy phải sản xuất trong mỗi ngày là bằng nhau). Để đẩy nhanh tiến độ công việc trong giai đoạn tăng cường phòng chống đại dịch COVID-19, mỗi ngày nhà máy đã sản suất nhiều hơn dự định 35 thùng nước sát khuẩn. Do đó, nhà máy đã hoàn thành công việc trước thời hạn 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày nhà máy phải sản sản xuất bao nhiêu thùng nước sát khuẩn?

Lời giải.

Ví dụ 10 (Thi thử Dịch Vọng Hậu 2020). Hưởng ứng phong trào Tết trồng cây, chi đoàn thanh niên dự định trồng 30 cây trong một thời gian nhất đinh. Do mỗi giờ chi đoàn trồng nhiều hơn dự định 5 cây nên đã hoàn thành công việc trước dự định 20 phút và trồng thêm được 10 cây nữa. Tính số cây mà chi đoàn dự định trồng trong mỗi giờ.

Lời giải.

Ví dụ 11. Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 140 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 2 sản phẩm nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 8 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 12. Một xưởng may lập kế hoạch may một lô hàng, theo dự định mỗi ngày may xong 60 áo. Nhưng nhờ cải tiến kỹ thuật, xưởng đã may được 120 áo mỗi ngày. Do đó xưởng không những hoàn thành trước thời hạn 8 ngày mà còn may thêm 240 áo. Hỏi theo kế hoạch phân xưởng phải may bao nhiêu áo?

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Bài toán làm chung công việc

Để giải loại toán này ta thường coi toàn bộ công việc là 1 đơn vị, suy ra

(1) Năng suất $= \dfrac{1}{\text{Thời gian}}$.

(2) Lập phương trình theo mẫu

$$\text{Tổng các năng suất riêng} = \text{Năng suất chung}$$

Ví dụ 13. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Biết rằng thời gian vòi I chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì phải mất bao lâu mới đầy bể?

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 14. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải.

Ví dụ 15. Hai bạn An và Bình cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Nếu làm riêng thì Bình làm xong việc lâu hơn An làm xong việc là 9 ngày. Hỏi nếu An làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì Bình hoàn thành nốt công việc còn lại trong thời gian bao lâu?

Lời giải.

Ví dụ 16. Hai đội công nhân cùng làm 1 đoạn đường trong 30 ngày thì xong. Mỗi ngày, phần việc đội A làm được gấp hai lần đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu.

Lời giải.

Ví dụ 17. Hai đội công nhân cùng làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 12 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội I sẽ hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó?

Lời giải.

Ví dụ 18. Để hoàn thành một công việc, hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 4 giờ. Trên thực tế sau 3 giờ hai tổ làm chung thì tổ I bị điều đi làm việc khác, tổ II hoàn thành nốt công việc còn lại trong 3 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Lời giải.

Ví dụ 19. Hai người thợ quét sơn một tòa nhà. Nếu họ cùng làm trong 12 ngày thì xong công trình. Tuy nhiên thực tế hai người làm cùng nhau trong 4 ngày thì người thứ nhất được chuyển đi làm công việc khác, người thứ hai làm một mình trong 14 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu.

Lời giải.

Ví dụ 20. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ vòi I chảy một mình trong 1 giờ, sau đó mở thêm vòi II cùng chảy trong 3 giờ nữa thì được $\dfrac{5}{6}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải.

Dạng 4. Bài toán liên quan đến số và chữ số

Trong hệ thập phân thì số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.
Trong đó các chữ số a, b, $c \in \mathbb{N}$; $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$.

Ví dụ 21. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng của các chữ số của nó bằng $\dfrac{1}{4}$ số đó và nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới hơn số đã cho là 18 đơn vị.

Lời giải.

Ví dụ 22. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng hai chữ số của số đó bằng 13 và nếu chia chữ số hàng chục cho hàng đơn vị thì được thương là 2 dư 1. Tìm số đó.

Lời giải.

Ví dụ 23. Cho hai số tự nhiên biết tổng của chúng là 33 và nếu lấy số lớn chia cho số bé thì được thương là 4 dư 3. Tìm hai số đã cho.

Lời giải.

Ví dụ 24. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 3 lần chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó cho nhau ta được một số mới nhỏ hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đó.

Lời giải.

Ví dụ 25. Tổng chữ số hàng đơn vị và 5 lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là 21. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 27 đơn vị. Tìm số đó.

Lời giải.

Ví dụ 26. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 10 và nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Lời giải.

Ví dụ 27. Một số tự nhiên có hai chữ số. Tỉ số giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là $\frac{2}{3}$. Nếu viết thêm chữ số 1 xen vào giữa thì được số mới lớn hơn số đã cho là 370 đơn vị. Tìm số đã cho.

Lời giải.

Dạng 5. Bài toán có nội dung hình học

- Với hình chữ nhật:

  Diện tích = Chiều dài × Chiều rộng.

  Chu vi = (Chiều dài + Chiều rộng) × 2.

- Với hình tam giác:

  Diện tích = $\frac{1}{2}$× Cạnh đáy × Chiều cao.

  Chu vi = Tổng các cạnh.

Ví dụ 28. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 29. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2. Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 30 (TS 10 Bình Phước 2020). Một thửa đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 4 m và có diện tích là 320 m^2. Tính chu vi thửa đất đó.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 31 (TS 10 Lạng Sơn 2020). Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 160 m và diện tích là 1500 m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Lời giải.

Ví dụ 32. Một mảnh vườn có hình dạng hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài mảnh vườn đó thêm 2 m và giảm chiều rộng mảnh vườn đó đi 2 m thì diện tích của mảnh vườn giảm đi 20 m^2. Nếu giảm chiều dài mảnh vườn đi 3 m và tăng chiều rộng mảnh vườn thêm 2 m thì diện tích mảnh vườn không thay đổi. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật lúc ban đầu.

Lời giải.

Dạng 6. Bài toán phần trăm

Ví dụ 33 (TS 10 Bình Định 2020). Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi lớp 9 cấp trường, tổng số học sinh đạt giải của cả hai lớp $9A1$ và $9A2$ là 22 em, chiếm tỉ lệ 40% trên tổng số học sinh dự thi của hai lớp trên. Nếu tính riêng từng lớp thì lớp $9A1$ có 50% học sinh dự thi đạt giải và lớp $9A2$

có 28% học sinh dự thi đạt giải. Hỏi mỗi lớp có tất cả bao nhiêu học sinh dự thi?

Lời giải.

Ví dụ 34 (TS 10 Hà Tĩnh 2020). Trong quý I, cả hai tổ A và B sản xuất được 610 sản phẩm. Trong quý II, số sản phẩm tổ A tăng thêm 10%, tổ B tăng thêm 14% so với quý I, do đó cả hai tổ sản xuất được 681 sản phẩm. Hỏi trong quý I, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Ví dụ 35 (TS 10 Nghệ An 2020). Hưởng ứng phong trào toàn dân chung tay đẩy lùi đại dịch Covid-19, trong tháng hai năm 2020, hai lớp 9A và 9B của một trường THCS đã nghiên cứu và sản xuất được 250 chai nước rửa tay sát khuẩn. Vì muốn tặng quà cho khu cách li tập trung trên địa bàn, trong tháng ba, lớp 9A làm vượt mức 25%, lớp 9B làm vượt mức 20%, do đó tổng sản phẩm của cả hai lớp vượt mức 22% so với tháng hai. Hỏi trong tháng hai, mỗi lớp đã sản xuất được bao nhiêu chai nước rửa tay sát khuẩn?

Lời giải.

Ví dụ 36. Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm theo kế hoạch. Khi thực hiện, tổ I làm vượt mức 15% kế hoạch, tổ II làm vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó cả hai tổ làm được 102 sản phẩm. Hỏi thực tế, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Ví dụ 37. Hai tổ của một nhà máy sản xuất khẩu trang trong một ngày sản xuất được 1500 chiếc khẩu trang. Để đáp ứng nhu cầu khẩu trang trong dịch cúm do chủng mới virut Corona gây ra nên mỗi ngày tổ một vượt mức 75%, tổ hai vượt mức 68%, cả hai tổ sản xuất được 2583 chiếc khẩu trang. Hỏi ban đầu trong một ngày mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chiếc khẩu trang?

Lời giải.

Dạng 7. Bài toán có nội dung lí hoá

Ví dụ 38 (TS 10 Ninh Bình 2020). Người ta đổ thêm 20 gam nước vào một dung dịch chứa 4 gam muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm thì dung dịch chứa bao nhiêu gam nước?

Lời giải.

Ví dụ 39. Có hai loại quặng chứa 75 % sắt và 50 % sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66 % sắt.

Lời giải.

Ví dụ 40. Người ta cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20 %. Sau đó lại cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ axit trong dung dịch A.

Lời giải.

Ví dụ 41. Có 2 thỏi thép vụn, một thỏi chứa 10% niken và thỏi còn lại chứa 35% niken. Cần lấy bao nhiêu tấn thép vụn mỗi loại trên để luyện được 140 tấn thép chứa 30% niken?

Lời giải.

Ví dụ 42. Để luyện được 140 tấn thép chứa 30% Niken, nhà máy luyện thép dùng hai loại thép vụn trong đó 1 loại chứa 10% Niken và 1 loại chứa 35% Niken. Hỏi nhà máy đã dùng bao nhiêu tấn thép vụn mỗi loại?

Lời giải.

Dạng 8. Bài toán khác

Ví dụ 43 (TS 10 Bắc Kạn 2020). Hai lớp $9A$ và $9B$ của một trường, quyên góp vở ủng hộ các bạn học sinh vùng khó khăn. Lớp $9A$ mỗi bạn ủng hộ 2 quyển, lớp $9B$ mỗi bạn ủng hộ 3 quyển, cả hai lớp ủng hộ được 160 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng tổng số học sinh cả hai lớp là 65 em.

Lời giải.

Ví dụ 44 (TS 10 Bình Thuận 2020). Lớp $9A$ có 80 quyển vở dự định khen thưởng học sinh giỏi cuối năm. Thực tế cuối năm tăng thêm 2 học sinh giỏi, nên mỗi phần thưởng giảm đi 2 quyển vở so với dự định. Hỏi cuối năm lớp $9A$ có bao nhiêu học sinh giỏi, biết mỗi phần thưởng có số quyển vở bằng nhau.

Lời giải.

Ví dụ 45 (TS 10 Đồng Nai 2020). Một nhóm học sinh được giao sắp xếp 270 quyển sách vào tủ ở thư viện trong một thời gian nhất định. Khi bắt đầu làm việc nhóm được bổ sung thêm học sinh nên mỗi giờ nhóm sắp xếp nhiều hơn dự định 20 quyển sách, vì vậy không những hoàn thành trước dự định 1 giờ mà còn vượt mức được giao 10 quyển sách. Hỏi số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là bao nhiêu?

Lời giải.

Ví dụ 46 (TS 10 Hải Dương 2020). Một đoàn xe nhận chở 480 tấn hàng. Khi sắp khởi hành đoàn có thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 8 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc? Biết rằng các xe chở khối lượng hàng là như nhau.

Lời giải.

Ví dụ 47 (TS 10 Quảng Ngãi 2020). Để chuẩn bị vào năm học mới, bạn An muốn mua một cái cặp và một đôi giày. Bạn đã tìm hiểu, theo giá niêm yết thì tổng số tiền để mua hai vật dụng trên là 850000 đồng. Khi bạn An đến mua thì cửa hàng có chương trình giảm giá: cái cặp được giảm 15000 đồng, đôi giày được giảm 10% so với giá niêm yết. Do đó bạn An mua hai vật dụng trên chỉ với số tiền 785000 đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi vật dụng trên là bao nhiêu?

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN CỦNG CỐ

Bài 1 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 1998-1999). Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn người đó đã tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

Bài 2 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 2007-2008). Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài 3 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 2013-2014). Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Bài 4. Một ô tô khởi hành từ A và đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 40km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 60km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ 30 phút so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A.

Bài 5. Một người đi từ A đến B trong một giờ. Lúc trở về người đó đi $\dfrac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc lớn hơn lúc đi là 2km/h. Phần đường còn lại người đó đi với vận tốc ít hơn lúc đi là 1km/h nên lúc về chậm hơn lúc đi là 40 giây. Tính đoạn đường AB.

Bài 6. Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc ban đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

Bài 7. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong khoảng thời gian nhất định. Biết rằng, nếu vận tốc giảm đi 10 km/h thì ô tô đến B chậm hơn 96 phút so với dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì ô tô đến sớm hơn dự định 2 giờ. Tính độ dài quãng đường AB.

Bài 8 (Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2015). Quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

Bài 9. Một ô tô tải đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h. Sau 1 giờ 30 phút thì một xe con cũng xuất phát đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h và đến B cùng lúc với xe tải. Tính độ dài quãng đường AB.

Bài 10. Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người, biết quãng đường AB dài 30 km/h.

Bài 11. Hai tỉnh A, B cách nhau 180 km/h. Cùng một lúc, ô tô đi từ A đến B và một xe máy đi từ B về A. Hai xe gặp nhau ở thị trấn C. Từ C đến B ô tô đi hết 2 giờ, còn từ C về A xe máy đi hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc của ô tô và xe máy biết rằng trên đường AB hai xe đều chạy với vận tốc không đổi.

Bài 12. Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc, một ô tô khác đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB mất bao lâu?

Bài 13 (Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm 2013). Trên quãng đường AB dài 210 km , tại cùng một thời điểm một xe máy khởi hành từ A đến B và một ôt ô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Bài 14. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km với vận tốc dự định. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc trung bình thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc trung bình của xe đạp khi đi từ A đến B.

Bài 15. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 10 km/h và sau đó đi từ B quay trở về A với vận tốc 15 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trong cả quãng đường đi và về?

Bài 16. Một người đi xe máy từ A đến B. Trong $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu người đó đi với vận tốc 50 km/h, trong $\frac{2}{3}$ quãng đường sau người đó đi với vận tốc 60 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AB?

Bài 17 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 2000-2001). Một ca nô chạy trên sông trong 8 h, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4 h, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 18 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 2006-2007). Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ A đến B dài 80 km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B 72 km. Thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 19 (Đề thi vào 10 THPT Tp. Hà Nội 2015-2016). Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2 km/giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài 20. Một chiếc thuyền xuôi và ngược trên khúc sông dài 60 km hết 5 giờ. Biết rằng thời gian xuôi dòng 6 km bằng thời gian ngược dòng 4 km. Hãy tính vận tốc của thuyền khi nước yên lặng.

Bài 21. Lúc 7 giờ, một ca nô chạy xuôi dòng từ bến A đến bến B dài 30 km. Ca nô nghỉ tại B 30 phút. Sau đó, ca nô ngược dòng với vận tốc riêng không đổi từ B về đến A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc dòng nước là 4 km/h.

Bài 22. Một chiếc thuyền xuôi dòng được 108 km rồi ngược về 60 km. Thời gian xuôi dòng và ngược dòng tổng cộng mất 11 giờ. Vận tốc xuôi dòng hơn vận tốc ngược dòng là 6 km/h. Tính vận tốc của thuyền xuôi dòng và ngược dòng.

Bài 23 (TS 10 Hà Nội 2020). Quãng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3 km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9 km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút. (Giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi tên toàn bộ quãng được đó).

Bài 24 (TS 10 Cần Thơ 2020). Một trường THCS A tổ chức cho giáo viên và học sinh đi tham quan tại một khu du lịch sinh thái vào cuối năm học. Giá vé vào cổng của mỗi giáo viên và học sinh lần lượt là 70 000 đồng và 50 000 đồng. Nhằm thu hút khách du lịch vào dịp hè, khu du lịch này đã giảm 10% cho mỗi vé vào cổng. Biết rằng đoàn tham quan có 150 người và tổng số tiền mua vé là 7 290 000 đồng. Hỏi trường THCS A có bao nhiêu giáo viên và bao nhiêu học sinh đi tham quan?

Bài 25 (TS 10 Điện Biên 2020). Một phòng họp gồm 180 người đều xếp đều trên các dãy ghế. nếu thêm 80 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy phải tăng thêm 3 người. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

Bài 26 (TS 10 Khánh Hoà 2020). Để chung tay phòng chống dịch COVID-19, hai trường A và B trên địa bàn tỉnh Khánh Hòa phát động phong trào quyên góp ủng hộ người dân có hoàn cảnh khó khăn. Hai trường đã quyên góp được 1137 phần quà gồm mì tôm (đơn vị thùng) và gạo (đơn vị bao). Trong đó mỗi lớp của trường A ủng hộ được 8 thùng mì và bao gạo; mỗi lớp của trường B ủng hộ được 7 thùng mì và 8 bao gạo. Biết số gạo ít hơn số thùng mì là 75 phần quà. Hỏi mỗi trường hợp có bao nhiêu lớp?

Bài 27 (TS 10 Thái Nguyên 2020). Ông Minh dự định đi bằng xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 80 km trong thời gian định trước. Khi đi được 20 km tại địa điểm C, xe của ông hỏng nên ông phải dừng lại sửa xe mất 10 phút. Sau khi sửa xe xong, để đảm bảo thời gian như đã định, ông Minh tăng vận tốc thêm 5 km/h. Trên quãng đường đi từ C đến B. Hãy tính vận tốc xe của ông Minh trên quãng đường A đến C.

Bài 28 (TS 10 Thừa Thiên Huế 2020). Để xây dựng thành phố Huế ngày càng đẹp hơn và khuyến khích người dân rèn luyện sức khỏe, Ủy ban nhân dân tỉnh Thừa Thiên Huế đã cho xây dựng tuyến đường đi bộ ven bờ Bắc sông Hương, từ cầu Trường Tiền đến cầu Dã Viên có chiều dài 2 km. Một người đi bộ trên tuyến đường này, khởi hành từ cầu Trường Tiền đến cầu Dã Viên rồi quay về lại cầu Trường Tiền hết tất cả $\dfrac{17}{18}$ giờ. Tính vận tốc của người đó lúc về, biết rằng vận tốc lúc đi hơn vận tốc lúc về là 0,5 km/h.

Bài 29. Để chở hết 60 tấn hàng, một đội xe dự định sử dụng một số xe cùng loại. Trước khi khởi hành, có 2 xe được điều động đi làm việc khác, vì vậy mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đội dự định dùng bao nhiêu xe?

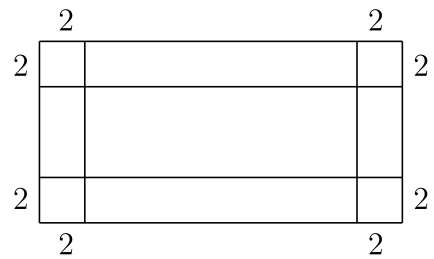
Bài 30 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nội, 2018). Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật theo đơn vị mét.

Bài 31. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 180 m. Nếu giảm chiều dài đi 20% và tăng chiều rộng thêm 20 m thì diện tích mới bằng $\dfrac{6}{5}$ diện tích cũ. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 32 (Đề thi tuyển sinh vào 10, Tỉnh Ninh Bình, 2018). Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2.

Bài 33 (Đề thi vào lớp 10, Tỉnh Quảng Trị, 2018). Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360 m^2. Nếu tăng chiều rộng lên 2 m và giảm chiều dài đi 6 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi của mảnh đất ban đầu.

Bài 34 (Tuyển sinh 10, Yên Bái, 2018).
Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48 cm. Người ta cắt bỏ mỗi góc của tấm tôn một hình vuông có cạnh 2 cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 96 cm^3. Tính diện tích tấm tôn ban đầu.



Bài 35. Cho hai vòi nước cùng chảy vào một vể không có nước thì sau 5 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì ta được $\frac{1}{4}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu?

Bài 36. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) trong 1 giờ 12 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 30 phút và vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì được $\frac{7}{12}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 37. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn không có nước trong 12 giờ thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 38. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước. Nếu cho vòi một chảy trong 3 giờ và cho vòi hai chảy trong 8 giờ thì đầy bể. Nếu cho vòi một chảy trong 1 giờ, rồi cho cả hai vòi cùng chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì được $\frac{8}{9}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 39. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Bài 40. Hai đội công nhân cùng làm xong một công việc trong 12 ngày. Nhưng họ chỉ làm cùng nhau được 6 ngày thì đội II phải đi làm việc khác, còn đội I tiếp tục làm với năng suất tăng gấp đôi so với lúc ban đầu nên đã hoàn thành phần việc còn lại sau đó 7 ngày. Hỏi nếu riêng mỗi đội làm xong công việc đó trong mấy ngày?

Bài 41. Hai người công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 16 giờ. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 42. Hai đội xây dựng cùng làm chung một công việc và dự định xong trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm công việc khác, đội II tiếp tục làm phần việc còn lại trong 7 ngày thì xong. Hỏi nếu đội I làm một mình thì sau bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc?

Bài 43. Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc?

Bài 44. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

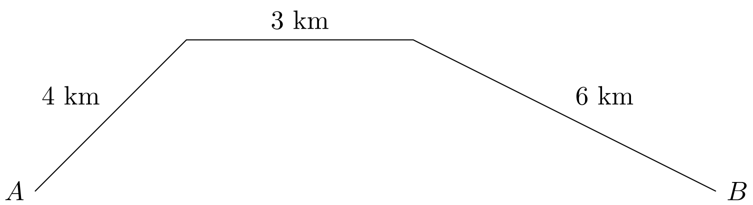
Bài 45. Hai người công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 8 giờ. Nếu người thứ nhất làm 2 giờ và người thứ hai làm 3 giờ thì họ làm được $\dfrac{1}{3}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 46. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được $\dfrac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Bài 47. Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 4 giờ 30 phút họ làm xong công việc. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 4 giờ, sau đó một mình người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được 75% công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu sẽ xong công việc? (Biết rằng năng suất làm việc của mỗi người là không thay đổi).

Bài 48 (TS 10 Nghệ An 2021). Vào tháng 5 năm 2021, chỉ sau 26 giờ phát hành sản phẩm MV âm nhạc "Trốn tìm"của rapper Đen Vâu đã chính thức dành Top1 trending của YouTube Việt Nam. Giả sử trong tất cả những người xem MV, có 60% số người đã xem 2 lượt và những người còn lại mới chỉ xem 1 lượt. Hỏi đến thời điểm nói trên có bao nhiêu người đã xem MV biết, biết rằng tổng số lượt xem là $6,4$ triệu lượt?

Bài 49 (TS 10 Quảng Ngãi 2021). Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km, một đoạn bằng phẳng dài 3 km và một đoạn xuống dốc dài 6 km (như hình vẽ). Một người đi xe đạp từ A đến B và quay về A ngay hết tổng cộng 130 phút. Biết rằng vận tốc người đó đi trên đoạn đường bằng phẳng là 12 km/h và vận tốc xuống dốc lớn hơn vận tốc lên dốc 5 km/h (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc của người đó.



BÀI 5. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa 5.1.

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số thực cho trước $(a \neq 0)$.
  Đặc biệt khi $b = 0$ thì hàm số bậc nhất có dạng $y = ax$.
- Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số thực đã biết $(a \neq 0$ hoặc $b \neq 0)$.
  Nếu $b \neq 0$ thì phương trình có thể đưa về dạng $y = mx + n$.
- Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là hàm số bậc hai đặc biệt.

Tính chất 5.1.

- *Hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và*
  - *đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$;*
  - *nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.*
- *Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và*
  - *nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$;*
  - *nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$, đồng biến khi $x < 0$.*

1. Đồ thị

- Đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng
  - cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b;
  - song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$ và trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

  Số a gọi là *hệ số góc*, số b gọi là *tung độ gốc* của đường thẳng.
  Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và trục Ox.
  - Nếu $a > 0$ thì $\tan \alpha = a$.
  - Nếu $a < 0$, ta đặt $\beta = 180^\circ - \alpha$. Suy ra $\tan \beta = |a|$.
    Ta tìm β rồi suy ra $\alpha = 180^\circ - \beta$.
- Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một parabol đỉnh O và nhận trục Oy làm trục đối xứng.
  - Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.
  - Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị và giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và parabol

Cho các đường thẳng $d\colon y = ax + b$, $d'\colon y = a'x + b'$ và parabol $(P)\colon y = kx^2$ (với $a,\ a',\ k \neq 0$). Khi đó

- d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$.
- $d \parallel d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.
- $d \equiv d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.

Xét phương trình $kx^2 = ax + b$. (1)

- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (P) không cắt d.
- Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (P) cắt d tại hai điểm phân biệt.
- Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (P) và d tiếp xúc nhau.
  Hoành độ giao điểm (hoặc tiếp điểm) của (P) và d chính là nghiệm của (1).

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tham số m biết hàm số bậc nhất đi qua điểm cho trước

a) *Bước 1.* Thay tọa độ điểm thuộc đồ thị vào phương trình đường thẳng.

b) *Bước 2.* Giải phương trình ẩn m.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (m+1)x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 3)$;

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; 1)$;

c) Vẽ đồ thị hàm số tìm được ứng với giá trị của m tìm được ở câu a) và b).

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = (m-1)x + 1$.

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 2)$;

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $B(3; -2)$.

c) Vẽ đồ thị hàm số tìm được ứng với giá trị của m tìm được ở câu a) và b).

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = (m-1)x + m$

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2;

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = (m-2)x + m - 1$

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2;

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới một đường thẳng cho trước không đi qua O

Để tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d không đi qua O, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Tìm lần lượt tọa độ giao điểm A, B của đường thẳng d với hai trục tọa độ Ox, Oy;
- *Bước 2.* Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d. Xét tam giác vuông OAB có hệ thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.

Tứ đó tính được độ dài OH chính là khoảng cách từ O đến đường thẳng d.

Ví dụ 5. Cho đường thẳng $d\colon y = x + 1$. Tính khoảng cách:

a) Từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d;

b) Từ điểm $M(-1; 1)$ tới đường thẳng d.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6. Cho đường thẳng $d\colon y = x - 1$. Tính khoảng cách:

a) Từ gốc tọa độ O tới đường thẳng d;

b) Từ điểm $M(1;1)$ tới đường thẳng d.

Lời giải.

Dạng 3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: $d\colon y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $d'\colon y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$. Khi đó:

a) d và d' song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.

b) d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

c) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$. Đặc biệt d và d' vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.

Ví dụ 7. Cho đường thẳng $\Delta: y = (m+1)x - 5$ với m là tham số. Tìm m để:

a) Δ song song với đường thẳng $d_1\colon y = 4x + 3$;

b) Δ cắt đường thẳng $d_2\colon y = x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1;

c) Δ vuông góc với đường thẳng $d_3\colon y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Cho các đường thẳng:

$d\colon y = (m-2)x + m + 7;$

$d_1\colon y = -mx - 3 + 2m;$

$d_2\colon y = -m^2x - 2m + 1;$

$d_3\colon y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3};$

$d_4 : y = -\dfrac{1}{6}(m+3)x + 4.$

Tìm m để:

a) $d \,/\!/\, d_1$;

b) $d \equiv d_2$;

c) d cắt d_3 tại điểm có tung độ $y = \dfrac{1}{3}$;

d) $d \perp d_4$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng $y = -mx$ và $y = \dfrac{1}{m}x + 4$ luôn nằm trên một đường tròn cố định với mọi $m \neq 0$.

Lời giải.

. . . .

Dạng 4. Xác định phương trình đường thẳng

Để xác định phương trình đường thẳng, ta thường làm như sau:

Bước 1. Gọi $d\colon y = ax + b$ là phương trình đường thẳng cần tìm (a, b là hằng số, $a \neq 0$);

Bước 2. Từ giả thiết của đề bài, tìm được a, b từ đó đi đến kết luận.

Chú ý: Mọi đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax + m$ luôn có phương trình $y = ax + b$. Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta cần xác định b.

Ví dụ 10. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua hai điểm A, B với $A(1;3)$ và $B(2;4)$;

b) d đi qua hai điểm C, D với $C(-3;2)$ và $D(2;3)$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 11. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua $M(2;-3)$ và song song với $d_1\colon y = -2x + 5$;

b) d đi qua $N(-1;-2)$ và vuông góc với $d_2\colon y = -x - 8$;

c) d song song với $d_3\colon y = 3x - 4$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_4 : y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}$; $d_5 : 2x - 3$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 12. Tìm a và b để đường thẳng $d\colon y = ax + b$

a) Cắt $d_1\colon y = x + 4$ tại một điểm nằm trên trục Ox và cắt $d_2\colon y = 5x - 3$ tại một điểm nằm trên trục Oy.

b) Đi qua điểm $M(1;2)$ và chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.

c) Song song với $d_3\colon y = x + 6$ và khoảng cách từ O đến d bằng $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua $M(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng $\frac{2}{5}$;

b) d đi qua $N(1; 2)$ và tạo với tia Ox một góc $60°$;

c) d đi qua điểm $P(0; -2)$ và tạo với tia Ox một góc $135°$.

Lời giải.

Ví dụ 14. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d có hệ số góc bằng $-\frac{3}{2}$ và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12;

b) d có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ và khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Dạng 5. Giao điểm của parabol và đường thẳng

Cho parabol $(P)\colon y = ax^2\ (a \neq 0)$ và đường thẳng $d\colon y = mx + n$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d.

$$ax^2 = mx + n. \qquad (*)$$

- Giải phương trình $(*)$ ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d.

Số nghiệm của $(*)$ bằng đúng số giao điểm của (P) và d, cụ thể:

- *Nếu $(*)$ vô nghiệm thì d không cắt (P).*
- *Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P).*
- *Nếu $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.*

Ví dụ 15. Cho $(P): y = \dfrac{1}{4}x^2$ và $(d): y = -2x - 3$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = 0,25x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = x - 1$ có đồ thị (D).

a) Vẽ (D) và (P) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) bằng phép toán.

Lời giải.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d)\colon y = 2x + m^2 - 1$ và parabol $(P)\colon y = x^2$ (với m là tham số).

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để độ dài khoảng HK bằng 3 (đơn vị độ dài).

Lời giải.

Ví dụ 18. Cho parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y = (m-1)x + m^2 + 1$, với m là tham số.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

b) Gọi x_1, x_2 là các hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm các giá trị của m, biết rằng $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ví dụ 19. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $y = x^2$ (P) và đường thẳng $y = mx + 3 - m$ (d) *(với m là tham số).*

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $M\ (1; 3)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của điểm M.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN CỦNG CỐ

Bài 1. Cho hàm số $y = (m + 5)x + 2m - 10$.

a) Với giá trị nào của m thì y là hàm số bậc nhất.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến.

c) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $\mathrm{A}(2; 3)$.

d) Tìm m để đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 9.

e) Tìm m đề đồ thị đi qua điểm 10 trên trục hoành.

f) Tìm m đề đồ thị hàm số song song với đồ thị hàm số $y = 2x - 1$.

g) Chứng minh đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi m.

h) Tìm m để khoảng cách từ O tới đồ thị hàm số là lớn nhất.

Bài 2. Cho đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 - m \quad (d)$. Xác định m để

a) Đường thẳng (d) qua gốc toạ độ.

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $2y - x = 5$.

c) Đường thẳng (d) tạo với Ox một góc nhọn.

d) Đường thẳng $(\ d\ )$ tạo với Ox một góc tù.

e) Đường thẳng (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ 2.

f) Đường thẳng $(\ d\ )$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ tại một điểm có hoành độ là 2.

g) Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số $y = -x + 7$ tại một điểm có tung độ y = 4.

h) Đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng $2x - 3y = -8$ và $2x - 3y = -8$.

Bài 3. Cho hàm số $y = (2m-3)x + m - 5$.

a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 6$.

b) Chứng minh họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định khi m thay đổi.

c) Tìm m đề đồ thị hàm số tạo với 2 trục toạ độ một tam giác vuông cân.

d) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục hoành một góc 45°.

e) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục hoành một góc 135°.

f) Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 3x - 4$ tại một điểm trên Oy.

g) Tìm m đề đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -x - 3$ tại một điểm trên Ox.

Bài 4. Chứng minh rằng đường thẳng $(m+2)x + y + 4m - 3 = 0$ luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Bài 5. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3;0)$ và $B(0;2)$.

Bài 6. Cho đường thẳng $(d_1)\colon y = 2012x + 2$. Xác định đường thẳng (d_2) sao cho (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Bài 7. Cho hàm số $y = mx + 3$ (d). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon (m-2)x + 4my + 1 = 0$ và $(d_2)\colon (m-2)x + 2012y + 5 - m = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

b) Tìm m để hai dường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau tại mội điểm thuộc trục hoành.

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x) = (m-2)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $M(-1;1)$.

b) Xác định m để khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) có giá trị lớn nhất.

Bài 10. Xác định phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua điểm $A(-4;1)$ và $B(-2;-3)$;

b) d đi qua $C(-2;2)$ và có hệ số góc bằng -2;

c) d đi qua $D(-1;2)$ và cắt đường thẳng $d_1\colon y=2x-2$ tại một điểm trên trục tung;

d) d đi qua $E(4;-5)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_2\colon y=4x+3$ và $d_3\colon y=3x+4$.

Bài 11. Cho hàm bậc nhất $y=(m-1)x+3-m$ với m là tham số $m\neq 1$ có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $M(-1,4)$.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Bài 12. Cho đường thẳng $(d)\colon y=2mx-m^2+4$ và parabol $(P)\colon y=x^2$, trong đó m là tham số thực.

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $m=1$.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm m để hoành độ giao điểm của (d) và (P) thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2=3$.

Bài 13. Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx-m+1$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của các parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m=3$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Bài 14. Cho parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y=2mx-2m+1$ (với m là tham số).

a) Chứng minh (d) và (P) luôn có điểm chung.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2=x_2-4$.

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d)\colon y=3x-m$ và parabol $(P)\colon y=x^2$.

a) Với $m=-4$. Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P).

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}=\sqrt{5}$.

Bài 16.

a) Tìm m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=3(x_1+x_2)$.

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d):y=(m+3)x-m$ và parabol $(P):y=2x^2$ với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2,5$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_1 để biểu thức $A=|x_1-x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 18 (TS 10 Bình Dương 2021). Cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=5x+6$.

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Viết phương trình đường thẳng (d') biết (d') song song với (d) và (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 24$.

Bài 19 (TS 10 Bình Thuận 2021). Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y = 2mx + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $|x_2| - |x_1| = 2021$.

Bài 20. Cho đường thẳng $d\colon y = (m-2)x + m + 3$ và parabol $(P)\colon y = mx^2$ và với x là ẩn và $m \neq 0$ là tham số.

1) Khi $m = -1$, hãy

a. Vẽ (P) và d trên cùng hệ tọa độ Oxy.

b. Tính diện tích tam giác OMN với M, N là các giao điểm của d và (P).

2) Tìm giá trị của m để

a. d đi qua $K(-2; 2)$;

b. Ba đường thẳng $d_1\colon y = 2x + 3$, $d_2\colon y = -x + 1$, và d đồng quy;

c. d tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc $135°$.

d. d song song với đường thẳng Δ, biết Δ đi qua $I(1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta'\colon 2x - y + 3 = 0$;

e. (P) đi qua điểm cố định của d;

f. d cắt các trục tọa độ Ox, Oy tạo thành các tam giác có diện tích bằng $2|m-2|$;

g. Khoảng cách từ $O(0; 0)$ đến d lớn nhất.

3) Viết phương trình đường thẳng d_3 song song với $d_1\colon y = 2x + 3$ và đi qua điểm cố định của d.

4) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm

a. Hệ thức độc lập giữa x_1 và x_2;

b. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x_1^2 + x_2^2$.

5) Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là các giao điểm của d và (P). Hãy tìm m để:

a. A và B nằm về hai phía của trục tung;

b. A và B nằm về cùng phía của đường thẳng $x = 1$;

c. x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 = 2x_2$;

d. AB song song với đường thẳng $d_4\colon y = 7x + 2017$. Tính diện tích tam giác OAB với m vừa tìm được.

Bài 21. Cho parabol $(P)\colon y = 2x^2$ và đường thẳng $d\colon y = (m-3)x + m$ với x là ẩn và m là tham số.

1) Khi $m = -2$, hãy

a. Vẽ (P) và d trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

b. Tính diện tích tam giác OMN với M, N là các giao điểm của d và (P).

2) Tìm giá trị của m để

a. d đi qua $M(-1; 2)$ và $d \,/\!/\, d_1\colon y = 2x + 3$.

b. d tạo với Ox một góc 60°.

c. d cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

d. Tìm m để khoảng cách từ $O(0;0)$ đến d lớn nhất.

3) Viết phương trình đường thẳng d_3 vuông góc với $d_2\colon y = -2x + 1$ và đi qua điểm cố định của d.

4) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

5) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ các giao điểm của d và (P). Hãy tìm

a. Tìm các hệ thức độc lập giữa x_1 và x_2;

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$;

c. Tìm m để A, B có hoành độ âm;

d. Tìm m để $(2x_1^2 + mx_1)(2x_2^2 + mx_2) = \dfrac{3}{2}$.

BÀI 6. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

A – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Đưa về phương trình dạng cơ bản

- $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A=B \end{cases}$ (hoặc $B \geq 0$)
- $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A=B^2 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+7}=0$.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+8}}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+27}-x=6$.

b) $\sqrt{x+7}-5=-x$.

Lời giải.

. . . .

Dạng 2. Đưa về phương trình tích

Ví dụ 3. Giải phương trình $(2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2 + 9x + 7$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x\sqrt{x+2}+15=3\sqrt{x+2}+10x$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Giải phương trình $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Lời giải.

Ví dụ 6. Giải phương các trình:

a) $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$

b) $\sqrt{x^3-2x^2-3x+6}-4\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-2}=-4$

c) $\sqrt{-x^2+4x+5}+4=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{5-x}$

Lời giải.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\sqrt{x+6}\cdot\sqrt[3]{x-9}-x+\sqrt{x+6}-x\sqrt[3]{x-9}=0$

Lời giải.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x-4}$

Lời giải.

Dạng 3. Đặt ẩn phụ hoàn toàn

Ta cần giải phương trình $F(x) = 0$.

Bước 1 Đặt $t = \sqrt{f(x)}$ hoặc $t = \sqrt{f(x) + k}$ hoặc $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$.

Bước 2 Đưa phương trình ban đầu về dạng $G(t) = 0$ẩn t đã biết cách giải.

Bước 3 Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình $G(t) = 0$, giải phương trình $t_0 = \sqrt{f(x)}$ hoặc $t_0 = \sqrt{f(x) + k}$ hoặc $t_0 = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$. Sau đó đối chiếu với điều kiện của phương trình ban đầu để kết luận nghiệm.

Ví dụ 9. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + 1} - 5 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 10. Giải phương trình $3\sqrt{x+2} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Giải phương trình $x^2 - 2x + 4 + \sqrt{x(x^2+4)} = 0$.

Lời giải.

Dạng 4. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Ta cần giải phương trình $F(x) = 0$.

Bước 1 Đặt $t = f(x)$.

Bước 2 Đưa phương trình ban đầu về dạng $G(t, x) = 0$ ẩn t đã biết cách giải.

Bước 3 Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình $G(t) = 0$, giải phương trình $t_0 = f(x)$. Sau đó đối chiếu với điều kiện của phương trình ban đầu để kết luận nghiệm.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Giải phương trình $x^2+2\sqrt{2-2x}=2$.

Lời giải.

Dạng 5. Đặt ẩn phụ bằng hằng số

Ta cần giải phương trình $F(x)=0$.
Về mặt ý tưởng, chúng ta đảo vai trò ẩn số thành hệ số và hệ số làm ẩn.
Ví dụ như $(2x+1)(1-(x^2+2))=0$ thì ta có $\left[\begin{array}{l}2x=1\\ x^2+2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1=2x\\ 1=x^2+2\end{array}\right.$. Do đó, một cách tự nhiên ta coi 1 là ẩn số. Đặt $y=1$, ta có phương trình $y^2-(x^2-2x+2)-2x(x^2+2)=0$. Điều này có rất có ý nghĩa ở chỗ chuyển từ một phương trình bậc cao về phương trình bậc hai. Từ phân tích như vậy, ta khái quát thành phương pháp như sau:

Bước 1 Đặt $K=f(x)$ với K là hằng số.

Bước 2 Đưa phương trình ban đầu về dạng $G(K,x)=0$ ẩn K đã biết cách giải.

Bước 3 Với mỗi nghiệm K của phương trình $G(K,x)=0$, giải phương trình $K=f(x)$. Sau đó đối chiếu với điều kiện của phương trình ban đầu để kết luận nghiệm.

Ví dụ 14. Giải phương trình $x^2+2\sqrt{2-2x}=2$.

Lời giải.

Ví dụ 15. Giải phương trình $x^2 - 3x + 1 + \sqrt{2x-1} = 0$.

Lời giải.

....

Dạng 6. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp bậc là phương trình dạng $au^2 + buv + cv^2 = 0$.

Bước 1 Đặt $u = f(x), v = g(x)$.

Bước 2 Đưa phương trình ban đầu về dạng $au^2+buv+cv^2 = 0$ hoặc $au+bv = c\sqrt{uv}$ hoặc $au+bv = \sqrt{cu^2+dv^2}$.

Bước 3 Thay nghiệm thu được ở bước 2 vào u hoặc v. Giải phương trình, sau đó đối chiếu với điều kiện của phương trình ban đầu để kết luận nghiệm.

Ví dụ 16. Giải phương trình $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+1)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 17. Giải phương trình $x^2 + 3\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.

Lời giải.

Dạng 7. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Ta cần giải phương trình $F(x) = 0$.

Bước 1 Đặt $u = f(x), v = g(x)$.

Bước 2 Đưa phương trình ban đầu về hệ phương trình.

Bước 3 Thay nghiệm thu được ở bước 2 vào u hoặc v. Giải phương trình, sau đó đối chiếu với điều kiện của phương trình ban đầu để kết luận nghiệm.

Ví dụ 18. Giải phương trình $x^2 + 2\sqrt{2 - 2x} = 2$.

Lời giải.

Ví dụ 19. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x - 2} + 3\sqrt{6 - 5x} - 8 = 0$.

Lời giải.

Dạng 8. Phương pháp liên hợp

Mục đích chính là khử căn thức và đặt nhân tử chung, muốn vậy ta có thể **nhẩm nghiệm**, **thêm bớt (tách)** hoặc **nhóm số hạng** để nhân liên hợp. Một số hằng đẳng thức thường được sử dụng:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 - xy + y^2) \\ \ldots \\ x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \pm \sqrt{y} &= \dfrac{x-y}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}} \\ \sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y} &= \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \\ \sqrt[4]{x} \pm \sqrt[4]{y} &= \dfrac{x-y}{(\sqrt[4]{x} \mp \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \end{cases}$$

Nhận xét: muốn tìm ra số (hoặc biểu thức) để thêm bớt, ta có thể dự đoán (nhẩm nghiệm) bằng cách dùng chức năng Shift Solve của Casio.

Ví dụ 20. Giải phương trình $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6$.

Lời giải.

Ví dụ 21. Giải phương trình $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$.

Lời giải.

Ví dụ 22. Giải phương trình $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{2-x}+1)=1$.

Lời giải.

Ví dụ 23. Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Lời giải.

Ví dụ 24. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

Lời giải.

Ví dụ 25. Giải phương trình $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$.

Lời giải.

Ví dụ 26. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

Lời giải.

Ví dụ 27. Giải phương trình $9(x+1)^2=(3x+7)(1-\sqrt{3x+4})^2$.

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

B – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình: $x^2+8x=\sqrt{2x+6}$.

Bài 2. Giải phương trình: $x^2-10x-12=4\sqrt{2x+3}$.

Bài 3. Giải phương trình: $2x^2+x-3=2\sqrt{2x+3}$.

Bài 4. Giải phương trình: $4x+1-x^2=2\sqrt{2x+1}$.

Bài 5. Giải phương trình: $x^2-x-2=2\sqrt{16x+1}$.

Bài 6. Giải phương trình: $2x^2-3x+2=x\sqrt{3x-2}$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Bài 8. Giải phương trình $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}+x^2-x=0$.

Bài 10 (TS 10 Thái Bình 2021). Giải phương trình $x^2+6x+1-(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$.

Bài 11 (TS 10 Khánh Hòa 2021). Giải phương trình $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2+4x+1}=(8-2x)\sqrt{x+1}$

Bài 12. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3}=x+\sqrt{2x-1}$.

Bài 13. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2020}-\sqrt{x-2019}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2+x-2019\cdot 2020}\right)=4039$.

Bài 14 (TS 10 Đà Nẵng, Chuyên Lê Quí Đôn 2020). Giải phương trình $3x^3-x^2+2x-28+(x^3-4)\sqrt{x^3-7}=0$.

Bài 15 (TS 10 Chuyên Đắk Nông 2020). Giải phương trình $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$.

Bài 16 (TS 10 Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2020). Giải phương trình $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

Bài 17 (TS 10 Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2020). Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5$$

.

Bài 18 (TS 10 ĐHKHTN Hà Nội 2020). Giải phương trình

$$11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}.$$

Bài 19. Giải phương trình $2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3$.

Bài 20 (TS 10 Chuyên Toán Hải Dương). Giải phương trình: $5x^2+3x+6=(7x+1)\sqrt{x^2+3}$.

Bài 21 (TS 10 Chuyên Hải Phòng 2020). Giải phương trình $(x+1)\sqrt{-x^2+2x+6}=3+2x$.

Bài 22 (TS 10 Chuyên Hưng Yên - 2020). Giải phương trình

$$5x^2-2x-3-(2x-1)\sqrt{5x^2+2x-1}=0$$

.

Bài 23 (TS10 Chuyên Hùng Vương Phú Thọ 2021). Giải phương trình

$$x^3-7x^2+11x-4+2\sqrt{(x-1)^3}=0$$

.

Bài 24 (TS 10 Chuyên Thái Nguyên 2021). Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+18}+4x-1=0$$

.

Bài 25 (TS10 Chuyên Tin Hà Nội 2021). Giải phương trình $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

Bài 26 (TS10 Chuyên Thái Bình 2021). Giải phương trình $4\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}=3x+9$.

Bài 27 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2021). Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2-1}+15=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{x+4}+3\sqrt{x-1}$$

.

Bài 28 (Chuyên Quảng Nam 2021). Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x}=x^2-3x+2$.

BÀI 7. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa về bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$; $a \leq b$; $a \geq b$)) là bất đẳng thức.

2. Tính chất của bất đẳng thức

a) $a < b \Leftrightarrow b > a$.

b) $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$.

c) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

d) $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ nếu $c > 0$.
$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$ nếu $c < 0$.

e) Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều được bất đẳng thức cùng chiều.

f) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều được bất đẳng thức với cùng chiều với đẳng thức thứ nhất.

g) Nhân cùng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt:

- $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$; $|a| > |b| \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$.
- $a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

h) Nếu $a > b > 0$ thì $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

3. Một số hằng bất đẳng thức hay dùng

a) Nếu a và b là hai số cùng dấu thì $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

b) Nếu $a, b > 0$ thì $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).

c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$).

d) $|a - b| \geq |a| - |b|$ (dấu "=" xảy ra khi $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$).

e) Bất đẳng thức Cô-si:

- $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq \dfrac{2}{a+b}$ (với $a > 0$; $b > 0$).
- $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; $(a+b)^2 \geq 4ab$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

4. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

- Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức:
  - Muốn chứng minh $a < b$, ta chứng minh $a - b < 0$.
  - Muốn chứng minh $a > b$, ta chứng minh $a - b > 0$.
- Phương pháp biến đổi tương đương:

$$A < B \Leftrightarrow A_1 < B_1 \Leftrightarrow A_2 < B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow C < D.$$

  Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.
- Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng hằng bất đẳng thức quen thuộc: Từ những bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.
- Phương pháp phản chứng:
  Muốn chứng minh $A < B$, ta giả sử $A \geq B$ rồi suy ra điều vô lý (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

B – CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 2. Cho a, b, c. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}>1$.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho $a>0$, $b>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Chứng minh rằng

$$x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \leq 2.$$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C – BÀI TẬP

Bài 1. Cho $x \geq 0$ chứng minh rằng

a) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1} - 1$.

b) $\dfrac{x+5}{\sqrt{x+4}} > 2$.

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

b) $\dfrac{a}{2b+3c} + \dfrac{2b+3c}{4a} \geq 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \cdots + \frac{\sqrt{200}}{200} > 10 + 5\sqrt{2}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng $S = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$.

Bài 5. Cho $a \geq 1$, $b \geq 1$. Chứng minh rằng $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

Bài 6. Cho $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a > c,\ b > c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2-4x+7\right)}=x^2-3x+6.$ (1)

Bài 8. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+2b=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{3}{a^2+4b^2}\ge 14.$$

Bài 9. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y=\sqrt{10}$. Tìm giá trị của x và y để biểu thức $A=\left(x^4+1\right)\left(y^4+1\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{2-\sqrt{3-x^2}}$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{(1-c)^2}{\sqrt{2(b+c)^2+bc}}+\frac{(1-a)^2}{\sqrt{2(c+a)^2+ca}}+\frac{(1-b)^2}{\sqrt{2(a+b)^2+ab}}.$$

Bài 12. Cho các số thực dương $x,y>1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$.

Bài 13. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge 9(a+b+c).$$

Bài 14. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3}+\frac{1}{\sqrt{b}+2\sqrt{c}+3}\frac{1}{\sqrt{c}+2\sqrt{a}+3}\le\frac{1}{2}.$$

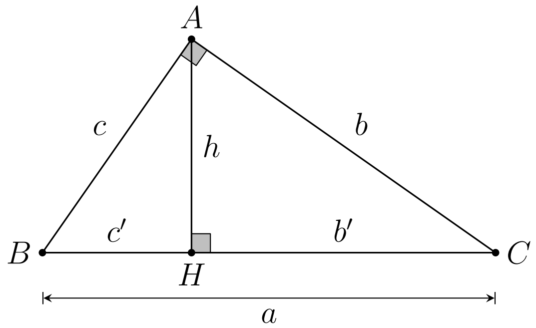
PHẦN II
HÌNH HỌC

BÀI 8. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Giả sử $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AH = h$, $BH = c'$, $CH = b'$. Khi đó ta có

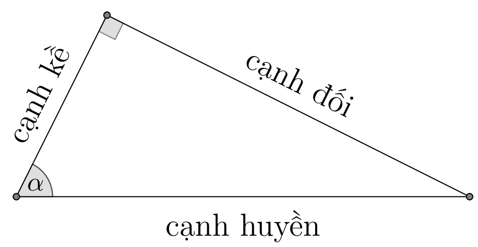
- $a^2 = b^2 + c^2$ (Định lý *Pythagore*).
- $c^2 = ac'$; $b^2 = ab'$.
- $h^2 = b'c'$.
- $ah = bc$.
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ (Công thức nghịch đảo đường cao).



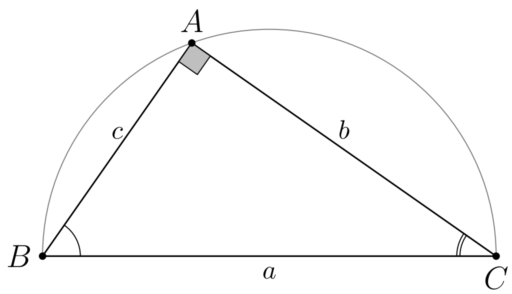
2) Định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn α

$\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$;

$\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$; $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$.



3) Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c.



(a) Định lý: Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

(b) Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A, ta có hệ thức
$b = a\cdot\sin B = a\cdot\cos C; b = c\cdot\tan B = c\cdot\cot C$
$c = a\cdot\sin C = a\cdot\cos B; c = b\cdot\tan C = b\cdot\cot B$.

4) Một số hệ thức lượng giác cơ bản

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (1)
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (2)
- $\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$ (3)
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (4)

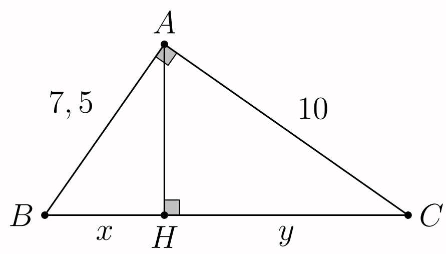
B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng trong tam giác vuông

1.
- Xác định vị trí cạnh huyền.
- Áp dụng hệ thức về cạnh hoặc đường cao.

2.
- Dùng kĩ thuật đại số hóa hình học: Nếu $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$ (m, n là hằng số) thì $AB = mt$, $CD = nt$, với $t > 0$.
- Xác định độ dài cạnh huyền.
- Áp dụng hệ thức về độ dài cạnh và đường cao.

Ví dụ 1.
Tính các độ dài x, y trong hình bên.



Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

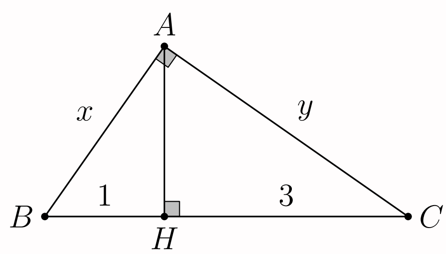
....

....

....

....

Ví dụ 2.
Tính các độ dài x, y trong hình bên.

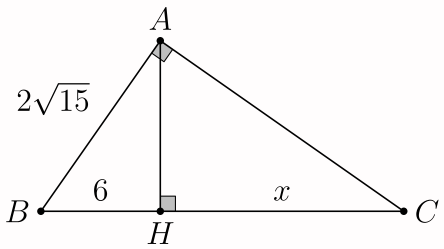


Lời giải.

....

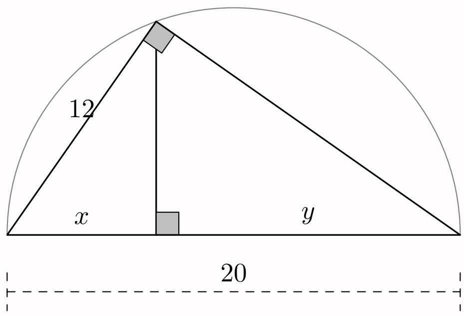
....

Ví dụ 3.
Tính độ dài x trong hình bên.



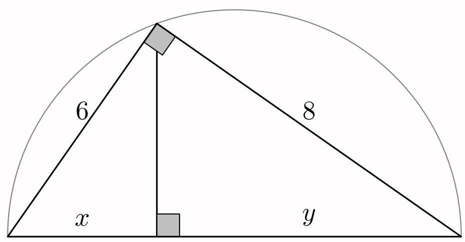
Lời giải.

Ví dụ 4.
Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



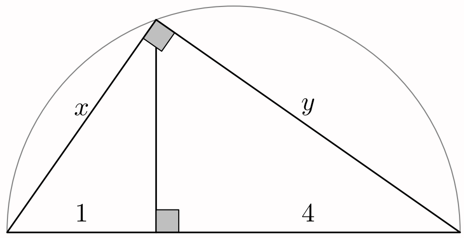
Lời giải.

Ví dụ 5.
Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



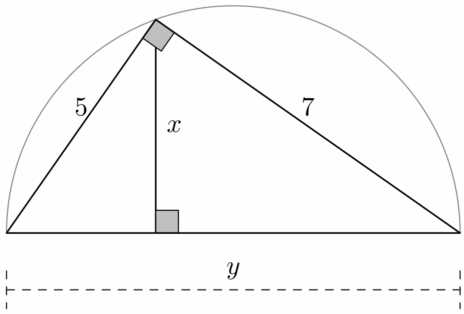
Lời giải.

Ví dụ 6.
Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

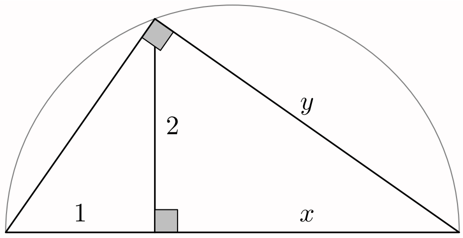
Ví dụ 7.
Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

Ví dụ 8.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

....

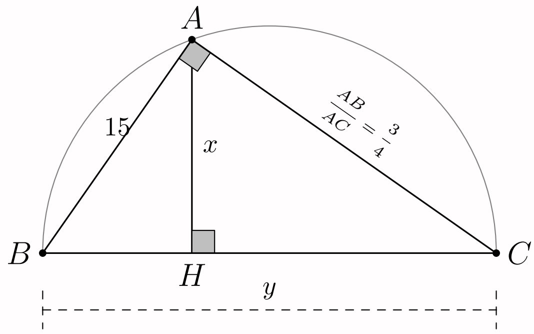
....

....

....

Ví dụ 9.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

....

....

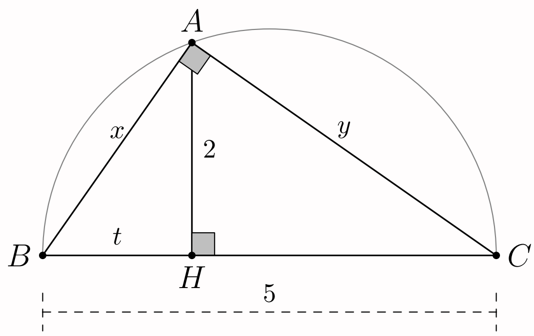
....

....

....

Ví dụ 10.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

....

....

....

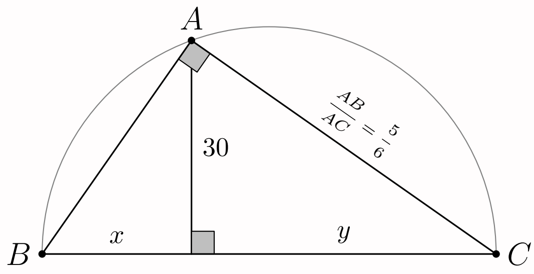
....

....

....

Ví dụ 11.

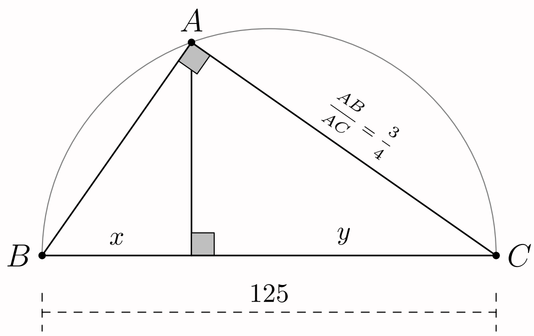
Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

Ví dụ 12.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Lời giải.

Ví dụ 13. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{4}{9}$. Tính tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 14. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{3}{4}$, cạnh huyền dài 10cm. Tính độ dài các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Lời giải.

. . . .

Dạng 2. Tính tỉ số lượng giác của các góc nhọn trong một tam giác vuông khi biết hai cạnh

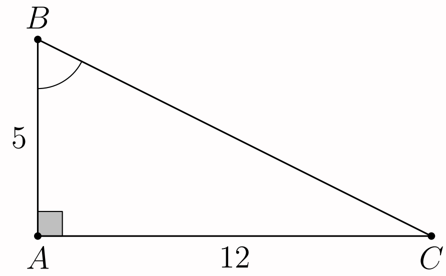
- Tính độ dài cạnh thứ ba (theo định lý Pytago).
- Tính các tỉ số lượng giác của một góc nhọn (theo định nghĩa).
- Suy ra các tỉ số lượng giác của góc nhọn còn lại theo định lí về tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

Ví dụ 15. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1,5$; $BC = 3,5$. Tính tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 16.
Tính tỉ số lượng giác của góc B trong hình bên.



Lời giải.

....

Ví dụ 17. $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Lời giải.

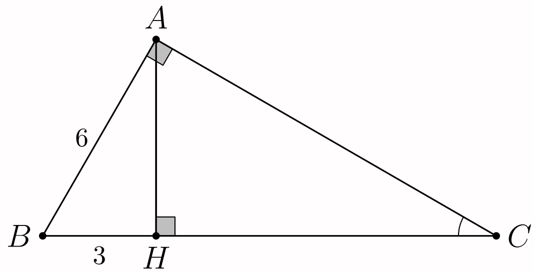
....

Ví dụ 18. Tam giác ABC cân tại A, có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

Lời giải.

....

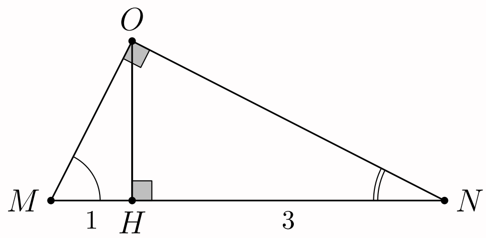
Ví dụ 19.
Tính $\tan C$ trong hình bên.



Lời giải.

. . . .

Ví dụ 20.
Tính $\sin M + \cos N$ trong hình bên.



Lời giải.

. . . .

Dạng 3. Chứng minh hệ thức lượng giác

Sử dụng định nghĩa của các tỉ số lượng giác và một số hệ thức lượng giác cơ bản đã biết

Ví dụ 21. Cho góc nhọn α. Chứng minh rằng

a) $\sin\alpha < \tan\alpha$;

b) $\cos\alpha < \cot\alpha$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 22. Với góc nhọn α tùy ý, chứng minh rằng

a) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

b) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

c) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lời giải.

Ví dụ 23. Với góc nhọn α tùy ý, chứng minh rằng

a) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

b) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Lời giải.

Ví dụ 24. Chứng minh các hệ thức

a) $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

b) $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Lời giải.

Ví dụ 25. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

b) $\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1} = \dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$.

Lời giải.

Ví dụ 26. Chứng minh rằng $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Lời giải.

Ví dụ 27. Chứng minh rằng $\dfrac{1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Lời giải.

Dạng 4. Biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính các tỉ số lượng giác khác của góc đó

Vận dụng các hệ thức cơ bản

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha};\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha};\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\tan^2\alpha};\ \frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1+\cot^2\alpha}.$$

Ví dụ 28. Cho biết $\sin\alpha = 0,6$; tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Lời giải.

Ví dụ 29. Cho biết $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

Lời giải.

Ví dụ 30. Cho biết $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, tính $\cot\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Lời giải.

Ví dụ 31. Cho biết $\cot x = 2$, tính $\tan x$, $\sin x$, $\cos x$.

Lời giải.

Dạng 5. Chứng minh một số hệ thức hình học

Ví dụ 32. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ có $\widehat{D} = 90^\circ$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng AD là trung bình nhân của hai đáy.

Lời giải.

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường cao BE và CD. Từ B vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng $AC^2 = AE \cdot AF$.

Lời giải.

Ví dụ 34. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.

Lời giải.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao AD và BE. Cho biết $BE = 2k$; $BC = 2m$; $AD = n$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2}$.

Lời giải.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, đường cao AH. Lấy điểm M trên đoạn thẳng HC sao cho $HM = AH$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC, cắt AC tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Lời giải.

Ví dụ 37. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng:

a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$;

b) $HB \cdot HC = MA \cdot MB + NA \cdot NC$;

c) $\dfrac{HB}{HC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Lời giải.

Ví dụ 38. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI cắt tia CD ở K. Kẻ $Dx \perp DI$ cắt tia BC ở L.

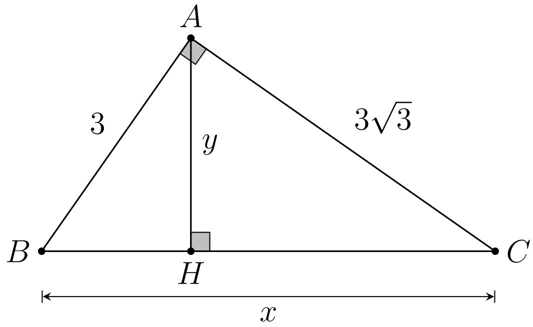
a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di động trên cạnh AB.

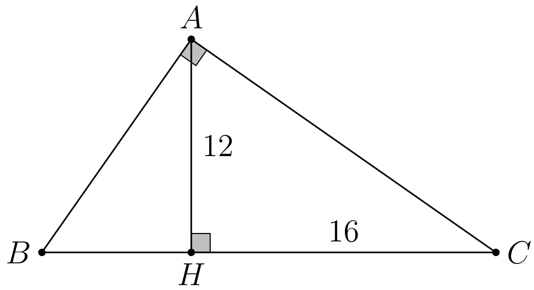
Lời giải.

C – BÀI TẬP CỦNG CỐ

Bài 1.
Tính độ dài x, y trong hình bên.

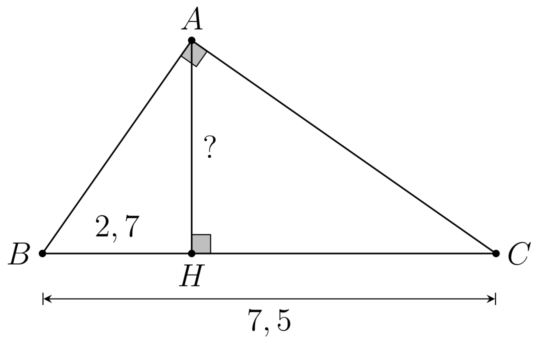


Bài 2.
Tính diện tích tam giác ABC trong hình bên.

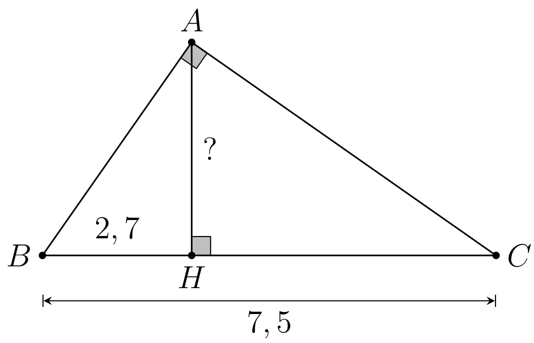


Bài 3.

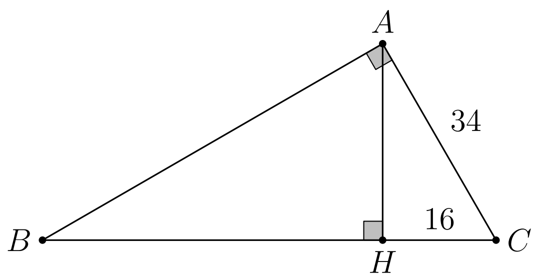
Tính độ dài AH trong hình bên.



Bài 4.
Tính độ dài HC trong hình bên.



Bài 5.
Tính tích $HA \cdot HB \cdot HC$ trong hình bên.



Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A có AH, BK là 2 đường cao. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$.

b) $BC^2 = 2CK \cdot CA$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và một điểm M thuộc cạnh huyền BC. Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} < 90^\circ\right)$,kẻ $BM \perp CA$. Chứng minh rằng

$$\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - 1.$$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Trên nữa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng $BD,\ DH,\ HA$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 10. Hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ có $AD = 5\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$ và $CD = 13\text{cm}$. Biết diện tích hình thang là 45cm^2.

a) Tính chiều cao của hình thang.

b) Chứng minh rằng $AB = \dfrac{1}{2}CD$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Chứng minh rằng $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB^3}{AC^3}$.

Bài 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua A kẻ đường vuông góc với BD tại H. Biết $AB = 20$, $AH = 12$. Tính chu vi hình chu nhật $ABCD$.

Bài 13. Trong một tam giác vuông tỉ số giữa đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tìm tỉ số độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\sin B = 0,8$. Hãy tính tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $\widehat{B} = \alpha$. Biết $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$. Hãy tính

a) Độ dài cạnh AC.

b) Độ dài cạnh BC.

Bài 16. Hãy tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ (làm tròn đến số thập phân thứ tư) nếu biết

a) $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$.

b) $\cot\alpha = \dfrac{3}{4}$.

Bài 17. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha$ biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Bài 18. Tính $\sin\alpha, \tan\alpha$ biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Bài 19. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ biết $\tan\alpha = 0,8$.

Bài 20. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ biết $\cot\alpha = 3$.

Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, hai đường cao BK và CL cắt nhau tại H. Trên đoạn HB lấy điểm E sao cho $\widehat{AEC} = 90^\circ$. Trên đoạn HC lấy điểm F sao cho $\widehat{AFB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

a) $AK \cdot AC = AL \cdot AB$.

b) $\triangle AEF$ cân.

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có AH, BK là 2 đường cao. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$.

b) $BC^2 = 2CK \cdot CA$.

Bài 23. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi I là trung điểm AB, kẻ IH vuông góc với BC tại H. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{4IH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AB^2}$.

b) $AC^2 + BH^2 = CH^2$.

Bài 24. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh BC (M khác B, C). Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và DC. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2}$.

Bài 25. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và một điểm M thuộc cạnh huyền BC. Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

b) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{HB}{HC}$.

c) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{CF}$.

d) $AH^3 = BC \cdot HE \cdot HF$.

e) $AH^3 = BC \cdot BE \cdot CF$.

f) $*\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Bài 27. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, $AB = a$, $AC = b$, K là hình chiếu của H lên AB.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

b) Chứng minh rằng $HK = \dfrac{a^2 b}{a^2 + b^2}$.

c) Giả sử $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4}$ và $AH = 12$. Tính AB, AC, BC, HB.

Bài 28. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K, L lần lượt là hình chiếu của H lên BC, CD.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{HB}{HD} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

b) Chứng minh rằng $HK = \dfrac{a^3}{a^2 + b^2}$.

c) Chứng minh rằng $HC^2 = \dfrac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2}$.

d) Cho $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ và gọi M là giao điểm của CH và AD. Tính HM.

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Lấy điểm D trên AC và điểm E là điểm nằm trên tia đối của tia HA sao cho $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{HE}{HA} = \dfrac{1}{3}$. Từ D kẻ DF song song với BC(F thuộc AC). Chứng minh rằng

a) $AH = EF$.

b) $BE \perp ED$.

Bài 30. Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính:

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ$.

b) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$.

Bài 31. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc α

a) $A = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

b) $B = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Bài 32. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Biết $AH = 8$ cm, $HC = 6$ cm, $HB = 4$ cm. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H lên AC, AB.

a) Tính độ dài các cạnh HE, HF.

b) Tính các cạnh của tam giác AEF.

c) Kẻ đường cao CK của tam giác ABC ($K \in AB$). Chứng minh rằng $FK = \frac{3}{10}AB$.

Bài 33. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, $AC = 8$ cm, $AH = 4{,}8$ cm.

a) Tính độ dài của BC và HB.
Các câu sau không dùng số liệu độ dài đoạn thẳng của đề bài:

b) Gọi M là trung điểm của AC. Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Chứng minh: $KA \cdot KC + KM^2 = \frac{1}{4}AC^2$.

c) Gọi I là hình chiếu của H trên AB, R, S thứ tự là hình chiếu của I, K trên BC. Chứng minh: $IR + KS = AH$.

d) Gọi Q là trung điểm của BC. Chứng minh: AQ vuông góc với IK.

BÀI 9. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng thứ ba

Bạn có thể

- Chia đoạn thẳng lớn nhất thành hai phần, sao cho một phần bảng đoạn thẳng thứ nhất và chứng minh phần còn lại bằng đoạn thẳng thứ hai.
- Dựng tổng của hai đoạn thẳng cho trước rồi chứng minh tổng này bằng đoạn thẳng thứ ba.

2. Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai góc bằng góc thứ ba

- Ta có thể làm tương tự như chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng đoạn thẳng thứ ba.
- Dùng định lí về góc nổi tiếp. Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

3. Chứng minh hai hệ thức hình học phẳng

- Dùng định lí Ta-lét: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì tạo ra những cặp đoạn thẳng tương ứng ti lệ.
- Hai tam giác đồng dạng thì các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, các cặp góc tương ứng bằng nhau.
- Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Dùng tính chất: Đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D.
  Ta có $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
- Dùng tính chất: Nếu từ một điểm M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB thì $MT^2 = MA \cdot MB$.

B – MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng $MB + MC = MA$.

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Người ta dựng hình bình hành $BHCD$ và gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành đó.

a) Chứng minh tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

b) So sánh góc $\widehat{BAH}$ và $\widehat{OAC}$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

c) Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để OH song song với BC.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MI, MJ với đường tròn (I, J là các tiếp điểm). Dây IJ cắt OM tại N và cắt OA tại B.

a) Chứng minh $OA \cdot OB = OM \cdot ON = R^2$.

b) Gọi C là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MIJ. Chứng minh C thuộc nửa dường tròn cố định.

c) Cho góc MIJ bằng α. Chứng minh diện tích tứ giác $MIOJ$ bằng $R^2 \cdot \tan \alpha$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng

a) $BH \cdot BE + CE \cdot CA = BC^2$.

b) $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$.

c) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH, ACH, BCH có bán kính bằng nhau.

Lời giải.

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn tâm O, kẻ đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Kẻ NE vuông góc với AH. Đường vuông góc với AC kẻ từ C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D. Tia AH cắt đường tròn tại F.

a) Chứng minh $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BIC}$.

b) Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

c) Chứng minh $\widehat{AME} = \widehat{ADB}$.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC. Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\widehat{A} = 45°$. Gọi D, E lần lượt là các hình chiếu vuông góc của B, C lên AC, AB; H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $DE \cdot AB = BC \cdot AD$.

b) Chứng minh $HE + HD = BE + CD$.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$ với góc $\widehat{BAD} < 90°$. Tia phân giác góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O (khác C). Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$.

b) Chứng minh $\triangle OBM = \triangle ODC$.

c) Gọi K là giao điểm của OC và BD; I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng $\dfrac{ND}{MB} = \dfrac{IB^2 - IK^2}{KD^2}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC) và BE vuông góc với AD (B thuộc AD).

a) Chứng minh $AH \cdot DC = AC \cdot BH$.

b) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng $IH = IE$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC. Kẻ $AH \perp BC$ (H thuộc BC), gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

a) Chứng minh $AC^2 = CH \cdot CB$.

b) $AC \cdot BM + AB \cdot CN = AH \cdot BC$.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, phân giác BE, E thuộc đoạn CA. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt AB tại F khác B.

a) Chứng minh $BC = AB + AF$.

b) Gọi K là hình chiếu của A lên BC. Trên AB lấy L sao cho $BL = BK$. Chứng minh

$$\frac{AL}{AF} = \sqrt{\frac{BK}{BC}}.$$

Bài 8. Cho đường tròn (w) có tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn (w). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AK, AL tới (w) với K, L là các tiếp điểm. Dựng tiếp tuyến (d) của đường tròn (w) tại điểm E thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{KL}$. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tai P và cắt ON tại Q.

a) Chứng minh $\widehat{AOL} = \widehat{AKL}$.

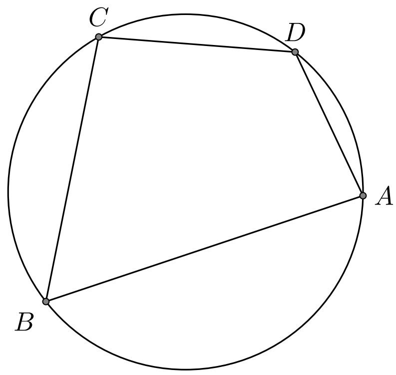
b) Chứng minh $\widehat{MON} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{KAL}}{2}$.

c) Chứng minh $KQ \cdot PL = EM \cdot EN$.

Bài 9. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB. Từ một điểm M bất kỳ trên đường tròn (M khác A và B), kẻ $MH \perp AB$ tại H. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF, cắt dây cung AB tại D. Chứng minh rằng: $\dfrac{MA^2}{MB^2} = \dfrac{AH}{BD} \cdot \dfrac{AD}{BH}$.

BÀI 10. TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ ĐIỂM NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Định nghĩa 10.1. *Tứ giác nội tiếp* là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó. Trong hình 1, tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và đường tròn (O) gọi là ngoại tiếp tứ giác.

Định lí 10.1. *Tứ giác nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi tổng số đo của hai góc đối bằng* 180°.

1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

- Sử dụng các tam giác vuông có cạnh huyền chung.
- Chứng minh các đỉnh của một đa giác cùng nằm trên một đường tròn.
- Sử dụng cung chứa góc.
- Chứng minh các tứ giác nội tiếp.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tổng hai góc đối bằng 180°

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC và N là một điểm thuộc cung nhỏ AB. AM, MN cắt BC lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng tứ giác $ADEN$ nội tiếp.

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 2. Trên đường tròn (O) có một cung AB, S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E, H. Các đường thẳng SE, SH cắt đường tròn theo thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{SHA} = \widehat{SCD}$.

b) Tứ giác $EHDC$ nội tiếp.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Trên BC lấy điểm M, vẽ đường thẳng vuông góc với OM tại M, cắt AB và AC lần lượt tại E và D. Chứng minh các tứ giác $EBMO$ và $DCOM$ nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm các đường tròn đó.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và dây AB. Gọi P là điểm chính giữa $\overparen{AB}$. Trên dây AB lấy hai điểm E, F. Các đường thẳng PE, PF cắt đường tròn tại C, D. Chứng minh tứ giác $EFDC$ nội tiếp.

Lời giải.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn đường kính AB cắt cạnh BC tại M. Trên cung nhỏ AM lấy điểm E (E khác $A; M$). Kéo dài BE cắt AC tại F.

a) Chứng minh $\widehat{BEM} = \widehat{ACB}$, từ đó suy ra tứ giác $MEFC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của ME và AC. Chứng minh $AK^2 = KE.KM$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. CD là đường kính di động. Gọi d là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O), các đường thẳng AC, AD cắt d lần lượt tại P và Q. Chứng minh tứ giác $CPQD$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

Ví dụ 7. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB > CD$, $AB \parallel CD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D chúng cắt nhau ở E. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh tứ giác $AEDM$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải.

Dạng 2. Sử dụng tính chất cung chứa góc

Ví dụ 8. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Một dây DE song song với BC cắt AC ở F. Tiếp tuyến tại B cắt DE ở I. Chứng minh tứ giác $AIBF$ nội tiếp.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 9. Cho $\triangle ABC$ có góc B, góc C nhọn. AH là đường cao, AM là đường trung tuyến, biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Gọi E là trung điểm AB.

a) Chứng minh Tứ giác $AEHM$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC, gọi D và E theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn tâm (O) nội tiếp tam giác với các cạnh AB và AC, H là giao điểm của đường thẳng BO và đường thẳng DE.

a) Chứng minh rằng bốn điểm O, E, H, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$, đường trung bình của tam giác ABC song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có AC vuông góc với BD tại H. Gọi M, N là chân đường vuông góc hạ từ H xuống đường thẳng AB và BC, P và Q là giao điểm của MH và NH với các đường thẳng CD và DA.

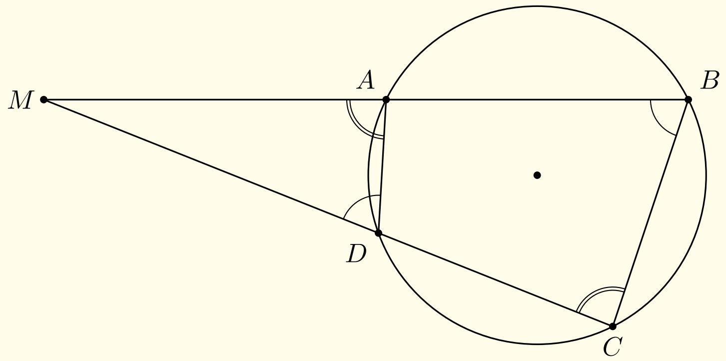
a) Chứng minh $PQ \parallel AC$.

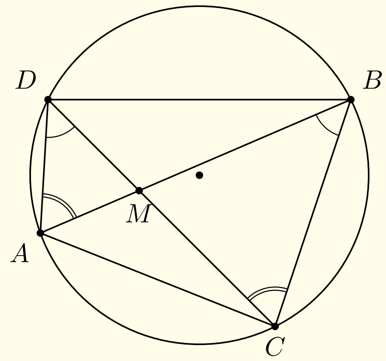
b) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ nội tiếp.

Lời giải.

Dạng 3. Chứng minh tứ giác nội tiếp sử dụng tính chất của tam giác đồng dạng

- Sử dụng kiến thức của tam giác đồng dạng ta thấy: Nếu hai cát tuyến AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại M thì $MA \cdot NB = MC \cdot MD$.





- Đảo lại, ta cũng chứng minh được: Nếu hai đường thẳng BA và CD cắt nhau tại điểm M sao cho $MA \cdot NB = MC \cdot MD$ thì bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Đây cũng là một cách nhận biết một tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 12. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại E, biết $EA \cdot EC = EB \cdot ED$. Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho hình thang vuông $ABCD(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ)$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ AH vuông góc với BE, DI vuông góc với CE, K là giao điểm của AH và DI.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHIC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $EK \perp BC$.

Lời giải.

Dạng 4. Chứng minh nhiều điểm nằm trên một đường tròn

Ví dụ 14. (**TS 10 Hà Nội 2017**)Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

a) Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

Lời giải.

Ví dụ 15. (**KSCL THCS Đa Trí Tuệ 2020**)Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $DCEH$ nội tiếp và $AD \cdot AE = AH \cdot AC$.

b) Tia AD và BE đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Chứng minh H và M đối xứng nhau qua BC và $\triangle CMN$ cân.

c) Gọi K là trung điểm của BC. Chứng minh 4 điểm D, E, F, K, I cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho đường tròn tâm O đường kính AD. Kẻ hai dây cung AC và BD cắt nhau tại điểm E nằm trong đường tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp.

b) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

c) Năm điểm B, C, I, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Ví dụ 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I là trung điểm của CD, E thuộc cạnh AB. Qua I kẻ IM vuông góc với DE, cắt AD tại H. Qua I kẻ IN vuông góc với CE, cắt BC tại K. Gọi G là giao điểm của EI và HK.

a) Chứng minh rằng bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng năm điểm E, G, N, K, B cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng năm điểm E, G, M, H, A cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Ví dụ 18. Cho tam giác nhọn ABC với đường cao AD. Gọi M là điểm đối xứng của D qua AB, N là điểm đối xứng của D qua AC, E và F theo thứ tự là giao điểm của MN với AB và AC. Chứng minh rằng năm điểm A, E, D, C, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Dạng 5. Một số bài toán tổng hợp

Ví dụ 19. (**KSCL THCS Herman 2020**)Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AN, AM tới đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng (d) qua A cắt đường tròn (O, R) tại B và C ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng qua B song song với AM cắt MN tại E.

a) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AB \cdot AC = AM^2$.

c) Chứng minh $IE \parallel MC$.

d) Chứng minh rằng khi đường thẳng (d) quay quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác MBC thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.

Ví dụ 20. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (O) $(A, B$ là tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua M cắt (O) ở C và D (C nằm giữa M và D, d và MB nằm khác phía đối với MO), AB giao với MO ở H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $MC \cdot MD = MH \cdot MO$.

c) Chứng minh rằng $\widehat{CHD} = 2\widehat{CBD}$.

d) Từ C và D kẻ hai tiếp tuyến với (O) chúng cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S thuộc đường thẳng cố định khi d quay quanh M.

Lời giải.

Ví dụ 21. Cho $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BE và CF lần lượt cắt (O) tại P và Q (P khác B và Q khác C). Tiếp tuyến tại B và C cắt EF lần lượt tại N và M.

a) Chứng minh bốn điểm B, F, E, C thuộc một đường tròn;

b) Đường thẳng MP cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh $\triangle MEC$ cân và $ME^2 = MK \cdot MP$;

c) Chứng minh $\widehat{FEK} = \widehat{FAK}$ và N, K, Q thẳng hàng.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỰ LUẬN CỦNG CỐ

Bài 1. (**TS 10 Hà Nội 2018**)Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1) Chứng minh rằng năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.

2) Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.

3) Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đường thẳng CD tại K. Chứng minh rằng tứ giác $ADHK$ nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.

4) Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 2. (**TS 10 Hà Nội 2016**)Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK \parallel DC$.

d) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Bài 3. (**TS 10 Gia Lai 2016**)Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm); B là điểm thay đổi trên cung nhỏ MN (B khác M và N; tia AB không đi qua O). Gọi C là giao điểm thứ hai của tia AB với (O) (C khác B), D là trung điểm của BC, K là giao điểm của BC và MN.

a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh $KA.KD = KB.KC$.

c) Khi điểm B di động trên cung nhỏ MN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MKD luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 4. (**TS 10 TP HCM 2016**)Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có ba góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các đoạn AC, AB lần lượt tại D, E. Gọi H là giao điểm của BD và CE, F là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh: $AF \perp BC$ và $\widehat{AFD} = \widehat{ACE}$.

b) Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh $MD \perp OD$ và 5 điểm M, D, O, F, E cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi K là giao điểm của AH và DE. Chứng minh $MD^2 = MK.MF$ và K là trực tâm của tam giác MBC.

d) Chứng minh: $\dfrac{2}{FK} = \dfrac{1}{FH} + \dfrac{1}{FA}$.

Bài 5. (**HK2 Thanh Xuân HN 2017**)Cho đường tròn (O, R) và dây BC cố định, $BC = R\sqrt{3}$. A là điểm di động trên cung lớn BC (A khác B, C) sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Kẻ đường kính AF của đường tròn (O), AF cắt BC tại điểm N.

a) Chứng minh tứ giác $BEDC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

c) Chứng minh tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K (K khác A). Chứng minh ba điểm K, H, F thẳng hàng.

Bài 6. (**HK2 Quận Bình Thạnh 2017**)Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

b) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại I. Vẽ tiếp tuyến ID với đường tròn (O) (D là tiếp điểm, D thuộc cung nhỏ BC). Chứng minh $ID^2 = IB \cdot IC$.

c) DE và DF cắt (O) tại M, N. Chứng minh $NM \parallel EF$.

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Một đường thẳng (d) thay đổi đi qua A luôn cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D thuộc cung nhỏ BC và cung BD lớn hơn cung CD), Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AH.AO = AD.AE = 3R^2$.

c) Chứng minh HC là tia phân giác của $\widehat{DHE}$.

d) Gọi G là trọng tâm ΔBDE. Chứng minh khi đường thẳng (d) thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.

BÀI 11. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG - ĐIỂM CỐ ĐỊNH

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trước hết các định ba loại yếu tố: *cố định, không đổi và thay đổi*. Phán đoán điểm cố định.
- Để dự đoán điểm cố định, ta vẽ hai vị trí của đường thẳng (thường chọn ví trí đặc biệt) và tìm giao điểm S của chúng.
- Dựa vào giả thiết để tìm mối quan hệ giữa điểm cố định (dự đoán) và các yếu tố khác của đề bài.
- Trình bày lời giải, chứng tỏ S là điểm cố định (là giao điểm của hai đường thẳng cố định hoặc nằm trên một tia cố định và cách gốc một khoảng không đổi...)

B – MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ có dây $BC < 2R$ cố định. Gọi S là điểm di động trên cung lớn BC. Kẻ BE và CF là đường cao của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H. Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua A và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên d. Đường tròn đường kính IO cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua B và C. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn. Đường thẳng MN cắt AO và AC tại H và K.

a) Chứng minh M, N di động trên một đường tròn cố định.

b) Gọi I là trung điểm của BC. NI cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh $MP \parallel BC$.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC < CA$. Gọi I là điểm trên AB và $IB < IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt tại E và F. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I.

a) Chứng minh $\triangle IME$ đồng dạng với $\triangle IFA$ và $IE \cdot IF = IA \cdot IB$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh rằng F, N, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định, C thay đổi sao cho $\widehat{BCA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng cố định.

Lời giải.

C–BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D (D khác B). Lấy điểm M bất kỳ trên AD. kẻ MH, MI lần lượt vuông góc với AB, AC ($H \in AB$, $I \in AC$).

1) Chứng minh: Tứ giác $MDCI$ nội tiếp.

2) Chứng minh: $\widehat{MID} = \widehat{MBC}$.

3) Kẻ $HK \perp ID$ ($K \in ID$). Chứng minh: K, M, B thẳng hàng và đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên AD.

Bài 2. (**TS 10 Bắc Giang 2019**)Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC ($BA < BC$). Trên đoạn thẳng OC lấy điểm I bất kỳ ($I \neq C$). Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Kẻ CH vuông góc với BD ($H \in BD$), DK vuông góc với AC ($K \in AC$).

a) Chứng minh rằng tứ giác $DHKC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Cho độ dài đoạn thẳng AC là 4 cm và $\widehat{ABD} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ACD.

c) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt đường thẳng BD tại E. Chứng minh rằng I thay đổi trên đoạn thẳng OC ($I \neq C$) thì điểm E luôn thuộc một đường tròn cố định

Bài 3. (**TS 10 Bình Định 2019**)Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một đường thẳng d không cắt đường tròn (O). Dựng đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng d tại điểm H. Trên đường thẳng d lấy điểm K (khác điểm H), qua K vẽ hai tiếp tuyến KA và KB với đường tròn (O), (A và B là các tiếp điểm) sao cho A và H nằm về hai phía của đường thẳng OK.

a) Chứng minh tứ giác $KAOH$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng OH tại điểm I. Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IH \cdot IO$ và điểm I cố định khi điểm K chạy trên đường thẳng d cố định.

c) Khi $OK = 2R$, $OH = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác KAI theo R.

Bài 4. (**TS 10 Hà Tĩnh Đề 1**)Cho đường tròn tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Đường thẳng (d) thay đổi đi qua M, không đi qua O và luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt C và D (C nằm giữa M và D).

a) Chứng minh $AMBO$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MC \cdot MD = MA^2$.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OCD luôn đi qua điểm cố định khác O.

Bài 5. (**HK2 Hai Bà Trưng HN 2017**)Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là một đường kính bất kì ($AC < CB$). Gọi giao điểm của AC, AD với xy theo thứ tự là M, N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MCDN$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC \cdot AM = AD \cdot AN$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCDN$ và H là trung điểm MN. Chứng minh rằng tứ giác $AOIH$ là hình bình hành. Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

d) Khi $\widehat{AHB} = 60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ tạo thành khi $AHIO$ quay quanh cạnh AH theo R.

Bài 6. (**HK2 Hoàng Mai HN 2017**)Cho đường tròn (O) có dây cung CD cố định. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$. Đường kính MN của đường tròn (O) cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kỳ trên cung lớn $\overset{\frown}{CD}$ (E khác C, D, N), ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.

a) Chứng minh rằng tứ giác $IKEN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $EI \cdot MN = NK \cdot ME$.

c) NK cắt MP tại Q. Chứng minh rằng IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.

d) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn $\overset{\frown}{CD}$ (E khác C, D, N) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Bài 7. (**HK2 Lương Thế Vinh HN 2017**)Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm M bất kì thuộc đường tròn (M khác A và B). Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn, tiếp tuyến này cắt tia BM tại N. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AN ở D.

a) Chứng minh 4 điểm A, D, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OD song song với BM và suy ra D là trung điểm của AN.

c) Đường thẳng kẻ qua O và vuông góc với BM cắt tia DM ở E. Chứng minh BE là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

d) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB và cắt đường thẳng BM tại I. Gọi giao điểm của AI và BD là J. Khi điểm M di động trên đường tròn $(O; R)$ thì J chạy trên đường nào?

Bài 8. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$. Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BAC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng AB, AC lại cắt đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại D và E. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K.

a) Chứng minh rằng $OI \cdot OA = OB \cdot OC$ và $AK \cdot AI = AE \cdot AC$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng OI và AK theo R.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$, một dây cung CD có trung điểm H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng SO, OH tại E, F. Gọi I là giao điểm của AB và CD.

a) Chứng minh tứ giác $SEHF$ nội tiếp được.

b) Chứng minh $OH \cdot OF = R^2$.

c) Chứng minh $SI \cdot SH = SC \cdot SD$.

d) Khi S đi động trên tia đối của DC chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AO. Đường thẳng Cx vuông góc với đường thẳng AB, Cx cắt nửa đường tròn trên tại I. Gọi K là điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn tại M. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm O tại M cắt Cx tại N. Gọi D là giao điểm của BM và Cx.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác MNK cân.

c) Tính diện tích $\triangle ABD$ khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI.

d) Chứng minh rằng khi K di động trên đoạn thẳng CI thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD đi qua một điểm cố định khác A.

Bài 11. Cho đường tròn (O) và điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua A nhưng không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

Bài 12. Cho một điểm M bất kì trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, qua điểm H cố định trên đoạn OB, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Gọi giao điểm của MA, MB và tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) với d lần lượt tại D, C và I. Gọi E là giao điểm của AC và đường tròn (O). Gọi K là giao điểm OI và ME.

a) Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Cho M di chuyển trên đường tròn (M không trùng với A; B). Chứng minh rằng tích $OI \cdot OK$ không đổi và ME luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 12. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tam giác cân ABC $(AB = AC)$, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK.

a) Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tính bán kính đường tròn (O) biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm.

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB, BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.

b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.

d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.

e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

f) Tìm tập hợp của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn $(A; AH)$. Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

a) Chứng minh tam giác BEC cân.

b) Gọi I là hình chiếu của A trên BE, chứng minh rằng $AI = AH$.

c) Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$.

d) Chứng minh $BE = BH + DE$.

Bài 4. Cho $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $APMO$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh $BM \parallel OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại $I; PN$ và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E, cắt tia BM tại F, tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh tứ giác $EFMK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AI^2 = IM \cdot IB$.

c) Chứng minh BAF là tam giác cân.

d) Chứng minh tứ giác $AKFH$ là hình thoi.

e) Xác đinh vị trí của M để tứ giác $AKFI$ nội tiếp một đường tròn.

Bài 6. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuôc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F nằm giữa B và E).

a) Chứng minh $AC \cdot AE$ không đổi.

b) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$.

c) Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 7. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho $AM < MB$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia $BM, M'A$. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng $\triangle PS'M$ cân.

c) Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ cân $(AB = AC)$. Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F. Đường thẳng BF cắt (O) tại I, DI cắt BC tại M. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF có ba góc nhọn.

b) $DF \parallel BC$.

c) Tứ giác $BDFC$ nội tiếp.

d) $\dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

b) Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

c) $CM \cdot CN$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

d) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào?

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB?AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, vẽ nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

a) Chứng minh $AFHE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Bài 11. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = 10\text{cm}$, $CB = 40\text{cm}$. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

a) Chứng minh $EC = MN$.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

c) Tính MN.

d) Tính diện tích hình giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC, đường thẳng BM cắt (O) tại D, đường thẳng AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CA là tia phân giác của góc $\widehat{SCB}$.

c) Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.

d) Chứng minh DM là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

e) Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC < AB)$ và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G. Chứng minh:

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.

b) Tứ giác $ADEC$ và tứ giác $AFBC$ nội tiếp.

c) $AC \parallel FG$.

d) Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Bài 14. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B, C, H), từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $APMQ$ là tứ giác nội tiếp, xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.

c) Chứng minh $OH \perp PQ$.

Bài 15. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B). Trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn, MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh $MCID$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCID$. Chứng minh $KCOH$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 16. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC, lấy điểm B tùy ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung $DE \perp AB$. Nối CD, kẻ $BI \perp CD$.

a) Chứng minh tứ giác $BMID$ nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác $ADBE$ là hình thoi.

c) Chứng minh $BI \parallel AD$.

d) Chứng minh I, B, E thẳng hàng.

e) Chứng minh MI là tiếp tuyến của đường tròn (O') đường kính BC.

Bài 17. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có $R > R'$ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, DB cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MDGC$ nội tiếp.

b) Bốn điểm M, D, B, F nằm trên một đường tròn.

c) Tứ giác $ADBE$ là hình thoi.

d) B, E, F thẳng hàng.

e) DF, EG, AB đồng quy.

f) $MF = \dfrac{1}{2}DE$.

g) MF là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài 18. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường tròn tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

a) Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.

b) Chứng minh $IP \parallel OQ$.

c) Chứng minh rằng $AP = PQ$.

d) Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

Bài 19. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì ($BC < 2R$). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

a) Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Các tứ giác $BIMK$, $CIMH$ nội tiếp .

c) Chứng minh $MI^2 = MH \cdot MK$.

d) Chứng minh $PQ \perp MI$.

Bài 20. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Vẽ dây cung $CD \perp AB$ ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh:

a) $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AB}$.

b) AM là tia phân giác của $\widehat{CMD}$.

c) Tứ giác $OHCI$ nội tiếp.

d) Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Bài 21. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B,C), từ M kẻ $MH \perp BC$, $MK \perp CA$, $MI \perp AB$. Chứng minh

a) Tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$.

c) $\triangle MIH \backsim \triangle MHK$.

d) $MI \cdot MK = MH^2$.

Bài 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC, E là điểm đối xứng của H qua BC, F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

a) Chứng minh tứ giác $BHCF$ là hình bình hành

b) E, F nằm trên đường tròn (O).

c) Chứng minh tứ giác $BCFE$ là hình thang cân.

d) Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 23. BC là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ $(BC \neq 2R)$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho (O) luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.

b) Gọi A' là trung điểm của BC. Chứng minh $AH = 2OA'$.

c) Gọi A_1 là trung điểm của EF. Chứng minh $R \cdot AA_1 = AA' \cdot OA'$.

d) Chứng minh $R(EF + FD + DE) = 2 \cdot S_{ABC}$; vị trí của A để tổng $EF + FD + DE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

a) Chứng minh tia AM là phân giác của $\widehat{OAH}$.

b) Giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

c) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $\widehat{OAH} = 20^\circ$. Tính

   a) $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của tam giác ABC.

   b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R.

Bài 25. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp $(O;R)$, biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

a) Tính số đo góc BOC và độ dài BC theo R.

b) Vẽ đường kính CD của $(O;R)$, gọi H là giao điểm của ba đường cao của tam giác ABC. Chứng minh $BD \parallel AH$ và $AD \parallel BH$.

c) Tính AH theo R.

Bài 26. Cho đường tròn O, đường kính $AB = 2R$. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

a) Chứng minh khi MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

b) Từ A kẻ $Ax \perp MN$, tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác $CMBN$ là hình bình hành.

c) Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.

d) Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào?

e) Cho $AM \cdot AN = 3R^2$, $AN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.

Bài 27. Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I, cắt đường tròn tại M.

a) Chứng minh $OM \perp BC$.

b) Chứng minh $MC^2 = MI \cdot MA$.

c) Kẻ đường kính MN, các tia phân giác của góc B và C cắt đường thẳng AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài 28. Cho tam giác ABC cân $(AB = AC)$, $BC = 6$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm, nội tiếp đường tròn (O), đường kính AA'.

a) Tính bán kính của đường tròn (O).

b) Kẻ đường kính CC', tứ giác $CAC'A'$ là hình gì? Tại sao?

c) Kẻ $AK \perp CC'$, tứ giác $AKHC$ là hình gì? Tại sao?

d) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác ABC.

Bài 29. Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \dfrac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\triangle AME \backsim \triangle ACM$.

c) Chứng minh $AM^2 = AE \cdot AC$.

d) Chứng minh $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$.

e) Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Bài 30. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của D lên AB, BE, CF, AC. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác $DMFP$, $DNEQ$ là hình chữ nhật.

b) Các tứ giác $BMND$, $DNHP$, $DPQC$ nội tiếp.

c) Hai tam giác HNP và HCB đồng dạng.

d) Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài 31. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

a) Chứng minh các tứ giác $OBIA$, $AICO'$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BAC = 90^\circ$.

c) Tính số đo góc OIO'.

d) Tính độ dài BC biết $OA = 9$ cm, $O'A = 4$ cm.

Bài 32. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của $O'M$ và AC. Chứng minh:

a) Các tứ giác $OBMA$, $AMCO'$ nội tiếp.

b) Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.

c) $ME \cdot MO = MF \cdot MO'$.

d) OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

e) BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

Bài 33. Cho đường tròn (O) đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).

b) Tứ giác $AEHF$ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

e) Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.

Bài 34. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Trên Ax lấy điểm M rồi kẻ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a) Chứng minh tam giác MON đồng dạng với tam giác APB.

b) Chứng minh $AM \cdot BN = R^2$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \dfrac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa đường tròn APB quay quanh cạnh AB sinh ra.

Bài 35. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm BC. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

a) Chứng minh tích $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Chứng minh $\triangle BOD$ đồng dạng $\triangle OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

Bài 36. Cho tam giác ABC cân tại A, có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C lần lượt cắt AC, AB ở D và E. Chứng minh:

a) $BD^2 = AD \cdot CD$.

b) Tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

c) BC song song DE.

Bài 37. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M, BN cắt (O) tại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

a) Chứng minh tứ giác $MNCE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $NE \perp AB$.

c) Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).

d) Chứng minh FN là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

Bài 38. Gọi AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B; C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc với AB tại H, cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

a) Chứng minh $CO = CD$.

b) Chứng minh tứ giác $OBDC$ là hình thoi.

c) Gọi M là trung điểm của CE; BM cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.

d) Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O; M; K thẳng hàng.

Bài 39. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại F.

a) Chứng minh $BC \parallel AE$.

b) Chứng minh $ABCE$ là hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm BC và OI. So sánh $\widehat{BAC}$; $\widehat{BGO}$.

Bài 40. Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến $PA; PB$ (A, B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C. Đoạn PC cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

a) Chứng minh $\triangle EAB \backsim \triangle EBD$.

b) Chứng minh AE là trung tuyến của $\triangle PAB$.

Bài 41. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A. Lấy trên cạnh AC một điểm D. Dựng CE vuông góc BD.

a) Chứng minh $\triangle ABD \backsim \triangle ECD$.

b) Chứng minh $ABCE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh FD vuông góc với BC, trong đó F là giao điểm của BA và CE.

d) Cho $\widehat{ABC} = 60°$; $BC = 2a$; $AD = a$. Tính AC, đường cao AH của $\triangle ABC$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADEF$.

Bài 42. Cho $\triangle ABC$ vuông $\widehat{ABC} = 90°$; $BC > BA$, nội tiếp trong đường tròn đường kính AC. Kẻ dây cung BD vuông góc AC. H là giao điểm AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn đường kính EC cắt BC tại I $(I \neq C)$

a) Chứng minh $\dfrac{CI}{CB} = \dfrac{CE}{CA}$

b) Chứng minh $D; I; E$ thẳng hàng.

c) Chứng minh HI là một tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.

Bài 43. Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng (d) cố định không cắt $(O; R)$. Hạ OH vuông góc với (d) $(H \in d)$. M là một điểm thay đổi trên (d) $(M \neq H)$. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MP và MQ $(P, Q$ là tiếp điểm) với (O, R). Dây cung PQ cắt OH ở I, cắt OM ở K.

a) Chứng minh 5 điểm $O; Q; H; M; P$ cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Chứng minh $IH \cdot IO = IQ \cdot IP$.

c) Giả sử $\widehat{PMQ} = 60°$. Tính tỉ số diện tích 2 tam giác: $\triangle MPQ$ và $\triangle OPQ$.

Bài 44. Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E $(E \neq A)$. Từ E, A, B kẻ các tiếp tuyến với nửa đường tròn. Tiếp tuyến kẻ từ E cắt hai tiếp tuyến kẻ từ A và B theo thứ tự tại C và D.

a) Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E tới nửa đường tròn. Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle EAC \backsim \triangle EBD$, từ đó suy ra $\dfrac{DM}{DE} = \dfrac{CM}{CE}$.

c) Gọi N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $MN \parallel BD$.

d) Chứng minh $EA^2 = EC \cdot EM - EA \cdot AO$.

e) Đặt $\widehat{AOC} = \alpha$. Tính theo R và α các đoạn AC và BD. Chứng tỏ rằng tích $AC \cdot BD$ chỉ phụ thuộc giá trị của R không phụ thuộc vào α.

Bài 45. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Gọi H là giao điểm của 3 đường cao $AA_1; BB_1; CC_1$.

a) Chứng minh tứ giác HA_1BC_1 nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn ấy.

b) Chứng minh A_1A là phân giác của $\widehat{B_1A_1C_1}$.

c) Gọi J là trung điểm của AC. Chứng minh IJ là trung trực của A_1C_1.

d) Trên đoạn HC lấy điểm M sao cho $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{1}{3}$. So sánh diện tích của hai tam giác $\triangle HJM$ và $\triangle HAC$.

Bài 46. Cho điểm C cố định trên một đường thẳng xy. Dựng nửa đường thẳng Cz vuông góc với xy và lấy trên đó 2 điểm cố định A, B (A nằm giữa C và B). M là một điểm di động trên xy. Đường thẳng vuông góc với AM tại A và với BM tại B cắt nhau tại P.

a) Chứng minh tứ giác $MABP$ nội tiếp được trong đường tròn và tâm O của đường tròn này nằm trên một đường thẳng cố định đi qua điểm giữa L của AB .

b) Kẻ $PI \perp Cz$. Chứng minh I là một điểm cố định.

c) BM và AP cắt nhau ở H; BP và AM cắt nhau ở K. Chứng minh $KH \perp PM$.

d) Cho N là trung điểm của KH. Chứng minh N, L, O thẳng hàng.

Bài 47. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và K là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AB lấy một điểm M (khác K, B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$. Kẻ dây BP song song với KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP, BM.

a) So sánh hai tam giác $\triangle AKN$ và $\triangle BKM$.

b) Chứng minh: $\triangle KMN$ vuông cân.

c) Tứ giác $ANKP$ là hình gì? Vì sao?

Bài 48. Cho (O), bán kính R, có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm tuỳ ý thuộc cung nhỏ AC. Nối MB cắt CD ở N.

a) Chứng minh tia MD là phân giác của $\widehat{AMB}$.

b) Chứng minh $\triangle BOM$ đồng dạng $\triangle BNA$. Chứng minh $BM \cdot BN$ không đổi.

c) Chứng minh tứ giác $ONMA$ nội tiếp. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ONMA$, I di động như thế nào?

Bài 49. Cho tam giác ABC cân $(AB = AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tia BD cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại điểm E; EC cắt (O) tại F.

a) Chứng minh BC song song với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.

b) Tứ giác $ABCE$ là hình gì? Tại sao?

c) Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của các tia BC với OI. So sánh $\widehat{BGO}$ và $\widehat{BAC}$.

d) Giả sử rằng $DF \parallel BC$. Tính $\cos\widehat{ABC}$.

Bài 50. Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Các đường thẳng AO, AO' cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C, D và cắt (O') lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh C, B, F thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

c) Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BDE$.

d) Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O').

Bài 51. Cho đường tròn $(O; R)$ có 2 đường kính cố định $AB \perp CD$.

a) Chứng minh $ACBD$ là hình vuông.

b) Lấy điểm E di chuyển trên cung nhỏ BC (E khác B, C). Trên tia đối của tia EA lấy đoạn $EM = EB$. Chứng tỏ ED là tia phân giác của $\widehat{AEB}$ và $ED \parallel MB$.

c) Chứng minh CE là đường trung trực của BM và M di chuyển trên một đường tròn, xác định tâm và bán kính theo R của đường tròn đó.

Bài 52. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Qua A vẽ đường thẳng về phía ngoài của tam giác, tạo với cạnh AC góc 40°. Đường thẳng này cắt cạnh BD kéo dài ở D. Đường tròn tâm O đường kính CD cắt AD ở E. Đường thẳng vuông góc với CD tại O cắt AD ở M.

a) Chứng minh $AHCE$ nội tiếp được. Xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Chứng minh $CA = CM$.

c) Đường thẳng HE cắt đường tròn tâm O ở K, đường thẳng HI cắt đường tròn tâm I ở N và cắt đường thẳng DK ở P. Chứng minh tứ giác $NPKE$ nội tiếp.

Bài 53. BC là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ $(BC \neq 2R)$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong $\triangle ABC$. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H.

a) Chứng minh $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

b) Gọi A' là trung điểm BC. Chứng minh $AH = 2A'O$.

c) Gọi A_1 là trung điểm EF. Chứng minh $R \cdot AA_1 = AA' \cdot OA'$.

d) Chứng minh $R \cdot (EF + FD + DE) = 2 \cdot S_{ABC}$. Suy ra vị trí điểm A để tổng $(EF + FD + DE)$ đạt GTLN.

Bài 54. Cho đường tròn tâm O có AB là đường kính cố định còn DC là đường kính thay đổi. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đường tròn tại B và AD, AC lần lượt cắt (Δ) tại Q và P.

a) Chứng minh tứ giác $CPQD$ nội tiếp được.

b) Chứng minh trung tuyến AI của $\triangle AQP$ vuông góc với DC.

c) Tìm tập hợp các tâm E của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CPD$.

Bài 55. Cho $\triangle ABC$ cân $(AB = AC;\ \widehat{A} < 90^\circ)$, một cung tròn BC nằm bên trong tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi Q là giao điểm của MB, IK. Gọi P là giao điểm của MC, IH.

a) Chứng minh: Các tứ giác $BIMK$, $CIMH$ nội tiếp được.

b) Chứng minh: Tia đối của tia MI là phân giác $\widehat{HMK}$.

c) Chứng minh: Tứ giác $MPIQ$ nội tiếp được. Từ đó suy ra $PQ \parallel BC$.

Bài 56. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, C là trung điểm của cung AB; N là trung điểm của BC. Đường thẳng AN cắt nửa đường tròn (O) tại M. Hạ $CI \perp AM$, $(I \in AM)$.

a) Chứng minh: Tứ giác $CIOA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh: Tứ giác $BMCI$ là hình bình hành.

c) Chứng minh: $\widehat{MOI} = \widehat{CAI}$.

d) Chứng minh: $MA = 3MB$.

Bài 57. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O), đường cao AH cắt đường tròn ở D, đường cao BK cắt AH tại E.

a) Chứng minh: $\widehat{BKH} = \widehat{BCD}$.

b) Tính góc $\widehat{BEC}$.

c) Biết cạnh BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Hỏi tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác $\triangle ABC$ chuyển động trên đường nào? Nêu cách dựng đường đó (chỉ nêu cách dựng) và cách xác định rõ nó (giới hạn đường đó).

d) Chứng minh $\triangle IOE$ cân tại I.

Bài 58. Cho hình vuông $ABCD$, phía trong hình vuông dựng cung một phần tư đường tròn tâm B, bán kính AB và nửa đường tròn đường kính AB. Lấy một điểm P bất kì trên cung AC, vẽ $PK \perp AD$ và $PH \perp AB$. Nối PA cắt nửa đường tròn đường kính AB tại I và PB cắt nửa đường tròn này tại M. Chứng minh rằng

a) I là trung điểm của AP

b) Các đường PH, BI và AM đồng quy

c) $PM = PK = AH$

d) Tứ giác APMH là hình thang cân

Bài 59. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Kẻ tia tiếp tuyến Bx, M là điểm thay đổi trên tia Bx; AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a) Chứng minh tứ giác $BOIM$ nội tiếp được trong một đường tròn

b) Chứng minh $\triangle IBN \backsim \triangle OMB$

c) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích $\triangle IOA$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 60. Cho $\triangle ABC$ đều, nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi AI là một đường kính có vị trí cố định và D là điểm di động trên cung nhỏ AC ($D \neq A$, $D \neq C$).

a) Tính cạnh của $\triangle ABC$ theo R và chứng tỏ AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

b) Trên tia DB lấy đoạn $DE = DC$. Chứng tỏ $\triangle CDE$ đều và $DI \perp CE$

c) Suy ra E di động trên đường tròn mà ta phải xác định tâm và giới hạn

d) Tính theo R diện tích $\triangle ADI$ lúc D là điểm chính giữa cung nhỏ AC

Bài 61. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Trên AD và DC lấy các điểm E và F sao cho $AE = DF = \dfrac{a}{3}$.

a) So sánh $\triangle ABE$ và $\triangle DAF$. Tính các cạnh và diện tích của chúng.

b) Chứng minh $AF \perp BE$.

Bài 62. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\widehat{A} = 45°$. Vẽ các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $HD = DC$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{DE}{BC}$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh $OA \perp DE$.

Bài 63. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh D thuộc đường tròn đường kính AB. Dựng BN và DM cùng vuông góc với AC. Chứng minh:

a) Tứ giác $CBMD$ nội tiếp một đường tròn.

b) Khi D di động trên đường tròn thì $\left(\widehat{BMD} + \widehat{BCD}\right)$ không đổi.

c) $DB \cdot DC = DN \cdot AC$.

Bài 64. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AKD sao cho $BD \parallel AC$. Nối BK cắt AC ở I.

a) Nêu cách vẽ cát tuyến AKD sao cho $BD \parallel AC$.

b) Chứng minh $IC^2 = IK \cdot IB$.

c) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh cát tuyến AKD đi qua O.

Bài 65. Cho $\triangle ABC$ cân ở A. Đường vuông góc với AB ở A cắt đường thẳng BC ở E; kẻ $EN \perp AC$. Gọi M là trung điểm BC. Hai đường thẳng AM và EN cắt nhau ở F.

a) Tìm các tứ giác có thể nội tiếp đường tròn. Giải thích vì sao? Xác định tâm các đường tròn đó.

b) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{AEF}$.

c) Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AFN$.

Bài 66. Cho nửa đường tròn tâm (O), đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn đó. Dựng hình vuông $ABED$ thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, không chứa đỉnh C. Gọi F là giao điểm của AE và nửa đường tròn (O); K là giao điểm của CF và ED.

a) Chứng minh bốn điểm E, B, F, K nằm trên một đường tròn.

b) $\triangle BKC$ là tam giác gì? Vì sao?

c) Tìm quỹ tích điểm E khi A di động trên nửa đường tròn.

Bài 67. Cho $\triangle ABC$ vuông tại C, có $BC = \dfrac{1}{2}AB$. Trên cạnh BC lấy điểm E (E khác B và C). Từ B kẻ đường thẳng d vuông góc với AE, gọi giao điểm của d với AE, AC kéo dài lần lượt là I, K.

a) Tính độ lớn góc $\widehat{CIK}$.

b) Chứng minh $KA \cdot KC = KB \cdot KI$ và $AC^2 = AI \cdot AE - AC \cdot CK$.

c) Gọi H là giao điểm của đường tròn đường kính AK với cạnh AB. Chứng minh H, E, K thẳng hàng.

d) Tìm quỹ tích điểm I khi E chạy trên BC.

Bài 68. Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy một điểm E. Nối BE và kéo dài cắt AC tại F.

a) Chứng minh $CDEF$ nội tiếp.

b) Kéo dài DE cắt AC ở K. Tia phân giác của $\widehat{CKD}$ cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác của $\widehat{CBF}$ cắt DE và CF tại P và Q. Tứ giác $MPNQ$ là hình gì? Tại sao?

c) Gọi r, r_1, r_2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD, ADC Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Bài 69. Cho đường tròn $(O; R)$. Hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. AE cắt CO ở F; DE cắt AB ở M.

a) Tam giác CEF và tam giác EBM là các tam giác gì?

b) Chứng minh tứ giác $FCBM$ nội tiếp. Tìm tâm đường tròn đó.

c) Chứng minh các đường thẳng $OE; BF; CM$ đồng quy.

Bài 70. Cho đường tròn $(O; R)$. Dây $BC < 2R$ cố định và A thuộc cung lớn BC (A khác B, C và không trùng với điểm chính giữa của cung). Gọi H là hình chiếu của A lên BC; E, F thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường kính AA'.

a) Chứng minh $HE \perp AC$.

b) Chứng minh $\triangle HEF \backsim \triangle ABC$.

c) Khi A di chuyển, chứng minh: tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$ cố định.

Bài 80. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi I, K tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$

a) Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle HIK$.

b) Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

(a) Chứng minh tứ giác $HCNK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

(b) Chứng minh $AM = AN$.

(c) Chứng minh $S' \leq \dfrac{1}{2}S$ trong đó S, S' lần lượt là diện tích $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$.

Bài 81. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Các điểm M, N thuộc (O) sao cho $CM \parallel BN \parallel AD$.

a) Chứng mình $AM = AN$.

b) Gọi giao điểm của BM và AC là E; giao điểm của CN và AB là F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E và F cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng các đường thẳng MF, NE và AD đồng quy.

Bài 82. Cho đường tròn tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) và cát tuyến ABC không qua O (tia AC. nằm giữa AN và $AO; B$ nằm giữa A và C).

a) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N thuộc cùng một đường tròn.

b) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường tròn tại điểm thứ hai E, NE cắt BC tại I. Chứng minh $\widehat{MON} = 2\widehat{NIB}$ và I là trung điểm của BC.

c) MN cắt BC tại K. Chứng minh $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

Bài 83. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Gọi hai điểm I và K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A đến hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O)

a) Chứng minh tứ giác $AHBI$ nội tiếp và xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBI$.

b) Chứng minh $\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$ và $AH^2 = AI \cdot AK$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AI và AK. Chứng minh rằng nếu $AH = AM + AN$ thì ba điểm A, O, H thẳng hàng.

Bài 84. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R, C$ là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tai C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh: Tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AH.AK = R^2$ và tứ giác $AMON$ là hình thoi.

c) Qua K kẻ đường thẳng song song với MN cắt (O) tại $E(E \neq K)$. Tiếp tuyến tại M cắt đường thẳng AB tại P. Đường thẳng PK cắt (O) tại $D(D \neq K)$. Chứng minh tứ giác $DCOK$ là tứ giác nội tiếp và 3 điểm $D; C; E$ thẳng hàng.

Bài 85. Cho (O) và dây BC không đi qua O, A là điểm bất kỳ trên cung lớn BC sao cho $AB \neq AC$. Kẻ đường kính AM của (O), $BE \perp AM$, $BF \perp AC$, $AD \perp BC$.

a) Chứng minh rằng 5 điểm A, F, E, D, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AB \cdot AC = AM \cdot AD$.

c) Chứng minh rằng

(a) $DE \perp AC$.

(b) Khi A di động trên cung lớn BC thì EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 86. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ đường thẳng d cắt (O) tại H, $K(AH < AK)$. Gọi I là trung điểm của HK. Kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là hai tiếp điểm và B thuộc cung lớn $\overset{\frown}{HK}$).

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOI$ nội tiếp.

b) Gọi G là giao điểm của OA và BC. Chứng minh $AC^2 = AH \cdot AK$ và $\widehat{AKO} = \widehat{AGH}$.

c) Hai tiếp tuyến tại H, K của đường tròn (O) cắt nhau tại S. Chứng minh GC là tia phân giác của góc $\widehat{HGK}$ và ba điểm B, C, S. thẳng hàng.

Bài 87. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến một điểm C sao cho $AC > R$. Từ C kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại E.

a) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $BE \parallel OC$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BE tại D. Chứng minh tứ giác $OBDC$ là hình bình hành.

d) Biết AD cắt OC tại F, CE cắt OD tại G, CD và OE kéo dài cắt nhau tại H. Chứng minh 3 điểm F, G, H thẳng hàng.

Bài 88. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính AK, biết E là hình chiếu của C trên AK và M là trung điểm BC.

a) Chứng minh 4 điểm C, E, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $AD \perp BC$. Chứng minh $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{2R}$.

c) Chứng minh $DE \parallel BK$.

d) Gọi F là hình chiếu của B trên BC. Chứng minh rằng khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DFE$ là một điểm cố định.

Bài 89. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC, đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt ở F và E. BE cắt CF tại H, AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh tia EB là tia phân giác của $\widehat{DEF}$.

c) Tia đối của tia DA cắt đường tròn (O) tại N, chứng minh $DN^2 = DH \cdot DA$.

d) Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B và C đến EF. Chứng minh $PQ = DE + DF$.

Bài 90. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi S là điểm đối xứng với A qua EF, K là điểm đối xứng với A qua O.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua A song song với EF cắt trung trực của AB tại N, NK cắt (O) tại L (khác K). Chứng minh rằng NB là tiếp tuyến của (O).

c) Chứng minh rằng: Khi điểm A thay đổi trên cung lớn BC của (O) thì $\dfrac{BK \cdot AL}{BL}$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác HSD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 91. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, BE, CF cùng đi qua trực tâm H. Gọi K là trung điểm của đoạn AH. Đường thẳng đi qua K và vuông góc với BK cắt AC tại N.

a) Chứng minh $BKEN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính BS của đường tròn (O). Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{SBC}$.

c) Chứng minh $BK \cdot BC = BN \cdot BE$ và $ON \parallel BC$.

Bài 92. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua trung điểm C của OA vẽ dây DE vuông góc với OA. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC $(K \neq B, D)$, H là giao điểm của AK và DE.

a) Chứng minh tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AH \cdot AK = AD^2$

c) Lấy điểm F trên đoạn KE sao cho $KF = KB$. Chứng minh $\triangle KFB$ là tam giác đều. Xác định vị trí của điểm K trên cung nhỏ BD để tổng $KD + KB + KE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 93. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Qua điểm C nằm giữa A và O vẽ đường thẳng vuông góc với AB, cắt nửa đường tròn (O) tại D. Trên cung BD lấy điểm M $(M \neq B, D)$. Tiếp tuyến với (O) tại M cắt CD tại E; AM cắt CD tại F.

a) Chứng minh tứ giác $BCFM$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $EM = EF$.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle FDM$. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

Bài 94. (**HK2 Lê Quý Đôn HN 2017**)Cho tam giác MAB vuông góc tại M, $MB < MA$. Kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Đường tròn (O) đường kính MH cắt MA và MB lần lượt tại E và F (E, F khác M).

a) Chứng minh tứ giác $MEHF$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh tứ giác $AEFB$ nội tiếp.

c) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác MAB tại P và Q (P thuộc cung MB). Chứng minh tam giác MPQ cân.

d) Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn (O'). Đường thẳng EF cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Bài 95. (**HK2 Mari Curie HN 2017**)Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DE tại H, cắt đường thẳng DC ở K.

a) Chứng minh rằng $BHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính số đo $\widehat{CHK}$.

c) Chứng minh hệ thức $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.

d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Bài 96. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). AD, BE, CF là ba đường cao, H là trực tâm của $\triangle ABC$.

a) Chỉ ra 6 tứ giác nội tiếp. Giải thích.

b) Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF. Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

c) Các tia AD, BE, CF cắt (O) lần lượt ở M, N, P. Chứng minh H đối xứng với M qua BC.

d) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MNP$.

e) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF bằng $\dfrac{1}{2}$ bán kính (O).

Bài 97. Cho $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ nội tiếp $(O; R)$, có ba đường cao AD, BE và CF đồng quy tại H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $DBFH$, $ACDF$ nội tiếp được.

b) Chứng minh rằng $HE.HB = HF.HC$.

c) Vẽ đường kính AM của (O), gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I và M thẳng hàng.

d) Giả sử $\widehat{BAC} = 60^o$, hãy tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$ theo R.

e) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng ba điểm H, G và O thẳng hàng.

f) Gọi T là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Giả sử $\widehat{BAC} = 60^o$, chứng minh rằng năm điểm B, H, T, O và C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 98. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp $(O; R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC, M là điểm đối xứng của H qua K và D là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh:

a) M nằm trên (O).

b) D nằm trên (O).

c) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle EFK$.

Bài 99. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Kéo dài BD và CE cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\triangle CHM$ cân.

c) Chứng minh rằng $\triangle AMN$ cân và $MN // DE$.

d) Gọi K là điểm đối xứng của D qua BC, F là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F và K thẳng hàng.

e) Q là giao điểm của AH và (O). Chứng minh ba điểm B, Q, K thẳng hàng.

f) Vẽ $DX \perp AB$ ở X, $DY \perp BC$ ở Y. Chứng minh $XY // EF$.

Bài 100. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp $(O; R)$, có hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ AK là đường kính của (O), I là giao điểm của AD và (O). Gọi F là giao điểm của CH và AB. Đường thẳng EF cắt (O) tại M và N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BIKC$ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.

c) Chứng minh rằng OA và EF vuông góc với nhau.

d) Chứng minh rằng $AM = AN$.

e) S là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $SM.SN = SE.SF$.

f) T là giao điểm của SA và (O). Chứng minh T thuộc đường tròn đường kính AH.

g) Biết rằng $AC = R\sqrt{3}$. Tính $\widehat{FED}$ và độ dài các đoạn thẳng DF, BH theo R.

h) Tính $DA^2 + DB^2 + DC^2 + DI^2$ theo R.

Bài 101. Qua điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC với đường tròn. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO tại H, cắt (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OK và BC.

a) Chứng minh tứ giác $EMOF$ nội tiếp.

b) Chứng minh AE, AF là các tiếp tuyến của (O).

c) Chứng minh $EB.CF = EC.BF$.

d) Gọi D là giao điểm của BC và EF. Chứng minh $DB.AC = DC.AB$.

Bài 102. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), có đường phân giác AD (D thuộc cạnh BC) cắt (O) tại E.

a) Chứng minh rằng OE đi qua trung điểm I của BC.

b) Chứng minh rằng $BA.BE = BD.EA$.

c) Gọi K, M lần lượt là hình chiếu của E lên AC và AB. Chứng minh rằng tứ giác $EIKC$ nội tiếp.

d) Chứng minh rằng ba điểm M, I và K thẳng hàng.

Bài 103. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm bất kỳ trên cung AB. Kẻ $MD \perp AB$ tại D. Qua một điểm C trên cung MB, kẻ tiếp tuyến Cx cắt DM tại I. DM cắt AC ở E và cắt BC ở F.

a) Chứng minh bốn điểm B, C, E, D cùng thuộc một đường tròn và bốn điểm A, D, C, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{MEC} = \widehat{ABC}$.

c) Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FEC.

d) K là giao điểm của AF và (O). Chứng minh IK là tiếp tuyến của (O).

Bài 104. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong (O). Đường cao AE của tam giác ABC cắt (O) tại F. AD là đường kính của (O).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCDF$ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng $AB.AC = AD.AE$.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng H đối xứng với F qua BC và DH đi qua trung điểm I của BC.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $GH = 2GO$.

Bài 105. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lần lượt lấy M, N trên cạnh AB, AD sao cho $\widehat{MCN} = 45°$ (M, N không trùng với các đỉnh của hình vuông). CM, CN lần lượt cắt BD tại E và F.

a) Chứng minh rằng các bộ 4 điểm B, C, F, M và C, D, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng E, F, N, M cùng thuộc một đường tròn có đường kính MN.

c) MF và NE cắt nhau tại H. Chứng tỏ rằng CH vuông góc với MN.

d) Chứng minh rằng CM là tia phân giác của $\widehat{HCB}$.

e) Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

f) Chứng minh rằng $S_{CEF} = S_{MNFE}$.

Bài 106. Cho điểm A có khoảng cách đến đường thẳng xy là $AB = 2a$. Trên xy lấy hai điểm C và D khác phía so với B sao cho $\widehat{DAB} = 45°$ và $\widehat{CAB} = 30°$. AD, AC cắt đường tròn đường kính AB lần lượt tại E và F.

a) Tính các cạnh của $\triangle ACD$ theo a.

b) Chứng tỏ E là trung điểm AD và bốn điểm E, F, C, D cùng nằm trên đường tròn.

c) Tính các cạnh của $\triangle AEF$ theo a.

d) Tính S_{CDEF} theo a.

Bài 107. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua B cắt (O) và (O') ở M và M' (M và M' khác B). Các tiếp tuyến tại M và M' của hai đường tròn cắt nhau ở N. MO và $M'O'$ cắt nhau ở P.

a) Chứng minh rằng $\triangle AOO'$ đồng dạng với $\triangle AMM'$, $\triangle AOM$ đồng dạng với $\triangle AO'M'$

b) Chứng minh rằng các tứ giác $NMPM'$, $NMAM'$ nội tiếp được.

c) Tính $\widehat{PAN}$.

d) Chứng minh rằng bốn điểm O, A, O' và P cùng thuộc một đường tròn.

Bài 108. Cho tam giác ABC có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. BE, CF cắt (O) lần lượt tại B', C' ($B' \neq B, C' \neq C$). Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên EF.

a) Chứng minh $AB' = AC'$.

b) Chứng minh $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$.

c) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

d) Chứng minh B là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle DEF$.

e) Chứng minh H và B' đối xứng với nhau qua AC.

f) Gọi A' là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh A' thuộc (0).

g) Chứng minh $OA \perp EF$.

h) Chứng minh: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}R \cdot P_{DEF}$.

Bài 109 (TS 10 Bình Dương 2021). Cho tam giác ABC vuông tại $A\,(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA. Gọi D là giao điểm của d và d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{AOF} = 2\widehat{CAE}$.

c) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) $DF \cdot DB = 2 \cdot AB^2$.

Bài 110 (TS 10 Quảng Ngãi 2021). Cho đường tròn (O, R) và điểm S nằm bên ngoài đường tròn, $SO = d$. Kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng 4 điểm S, O, A, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Trong trường hợp $d = 2R$, tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.

c) Gọi C là điểm đối xứng của B qua O. Đường thẳng SC cắt đường tròn (O) tại D (khác C). Hai đường thẳng AD và SO cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $SM^2 = MD \cdot MA$.

d) Tìm mối liên hệ giữa d và R để tứ giác $OAMB$ là hình thoi.

Bài 111 (TS 10 Khánh Hòa 2021). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O, R) và hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $BCEF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $OA \perp EF$.

c) Hai đường thẳng BE, CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N và P. Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M và cắt BC tại D. Tính giá trị biểu thức

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}.$$

Bài 112 (TS 10Bình Thuận 2021). Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Từ A vẽ cát tuyến AEF đến đường tròn (O) (với $AE < AF$). Chứng minh $AC^2 = AE \cdot AF$.

c) OA cắt BC tại H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng HB, tia OM cắt AB tại K. Đặt $\widehat{AOB} = \alpha$. Chứng minh $\cos^2 \alpha = \dfrac{KB}{KA}$.

Bài 113 (TS 10 Bình Phước 2021). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AEF không đi qua tâm O (E nằm giữa A và F; O và B nằm về hai phía so với cát tuyến AEF). Gọi K là trung điểm của EF.

a) Chứng minh tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh KA là phân giác của $\widehat{BKC}$.

c) Kẻ dây ED vuông góc OB sao cho ED cắt BC tại M. Chứng minh FM đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Bài 114. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB, C là điểm trên đường kính AB. Trên đường tròn lấy một điểm D và M là trung điểm cung DB. MC cắt đường tròn tại E, DE cắt AM tại K. Vẽ đường thẳng qua C song song AD và cắt DE tại F. Chứng minh:

a) Tứ giác $AKCE$ nội tiếp.

b) $CK \parallel BD$.

c) $CK \perp AD$.

d) Tứ giác $CBEF$ nội tiếp.

e) $CF = CB$.

Bài 115. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90°$, đường cao AH, M là điểm di động trên cạnh BC. Vẽ $BD \perp AM, (D \in AM), CE \perp AM, (E \in AM)$.

a) Chứng minh A, B, H, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh A, H, E, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh dường tròn đường kính DE luôn đi qua một điểm cố định.

d) Chứng minh trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

e) Chứng minh trung điểm của DE thuộc một đường tròn cố định. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

f) Xác định vị trí của điểm M để

- $BD + CE$ đạt giá trị lớn nhất.
- $BD + CE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 116. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt di động trên các cạnh AD, CD sao cho $\widehat{MBN} = 45°$, AC cắt BM và BN lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh A, B, F, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh B, C, N, E cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh M, E, F, N cùng thuộc một đường tròn.

d) Gọi H là giao điểm của MF và NE. Chứng minh $BH \perp MN$.

e) Chứng minh MN tiếp xúc với một đường tròn cố định. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

f) Chứng minh $DM + DN + MN = 2a$.

g) Xác định vị trí của M, N để diện tích $\triangle BMN$ có giá trị lớn nhất; nhỏ nhất.

Bài 117. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. M là một điểm di động trên đoạn AD. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của của M trên AB, AC. Gọi H là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng DK.

a) Tứ giác $AIMK$ là hình gì?

b) Chứng minh 5 điểm A, I, M, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh ba điểm B, M, H thẳng hàng.

d) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác HAB lớn nhất.

e) Chứng minh đường thẳng HI luôn đi qua một điểm cố định.

f) Xác định vị trí M để độ dài HI dài nhất.

Bài 118. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$. Tia phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$). Đường tròn (I) qua D tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (K) qua D và tiếp xúc với AC tại C và cắt (I) tại E.

a) Nêu cách vẽ I, K.

b) Chứng minh $\triangle DBC$ cân.

c) Chứng minh B, E, C thẳng hàng.

d) Một đường tròn tâm J di động đi qua A và D cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

   1) Chứng minh $MB = NC$.
   2) Đường trung trực của MN đi qua một điểm cố định.
   3) Chứng minh trung điểm F của MN di động trên một đường cố định.

e) DF cắt đường tròn (O) tại L. Chứng minh tứ giác $ACLB$ là hình thang cân.

Bài 119. Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$. BC là đường kính quay quanh O (đường thẳng BC không qua A). Đường tròn $(I; r)$ qua A, B, C cắt OA tại A và D.

a) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Chứng minh D là điểm cố định.

c) Chứng minh I thuộc một đường cố định.

d) Giả sử khoảng cách từ A đến đường thẳng BC là R. Tính r theo R.

e) Trường hợp AB, AC cắt $(O; R)$ lần lượt tại E, F. EF cắt OA tại K.

   1) Chứng minh bốn điểm F, D, K, C cùng nằm trên một đường tròn.
   2) Tính độ dài AK theo R.
   3) Chứng tỏ tâm của đường tròn qua A, E, F di động trên một đường cố định.

Bài 120. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ và có trực tâm là H, M là điểm chuyển động trên cung BC. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M trên BC, AC, AB.

a) Chứng minh M, C', B, A' cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh M, C', A, B' cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh M, A', B', C cùng thuộc một đường tròn.

d) Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

e) Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

f) Gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Vẽ AK vuông góc với NE tại K.

1) Chứng minh tứ giác $NAHB$ nội tiếp.
2) Chứng minh rằng N, H, E thẳng hàng.
3) Chứng minh $\widehat{BAC} = \widehat{NAK}$.
4) Xác định vị trí của điểm M để NE có độ dài lớn nhất

g) Chứng minh $MB \cdot AC + MC \cdot AB = MA \cdot BC$.

h) Chứng minh $\dfrac{AB}{MC'} + \dfrac{AC}{MB'} = \dfrac{BC}{MA'}$.

i) Xác định vị trí điểm M để

1) $MB \cdot AC + MC \cdot AB$ có giá trị lớn nhất.
2) $\dfrac{AB}{MC'} + \dfrac{AC}{MB'} + \dfrac{BC}{MA'}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 121. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AD cắt BC tại E, AB cắt CD tại F. Đường tròn qua D, C, E cắt EF tại $M (M \neq E)$.

a) Chứng minh M, A, D, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh M, B, C, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh $EA \cdot ED + FA \cdot FB = EF^2$.

d) Tia phân giác $\widehat{DEC}$ cắt AB, DC lần lượt tại H, K. Tia phân giác $\widehat{BFC}$ cắt AD, BC lần lượt tại I, L. Chứng minh

1. $EH \perp FI$
2. H, K, I, L là bốn đỉnh của hình thoi.

e) Gọi $O_1; O_2; O_3; O_4$ lần lượt là tâm của các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, DBC, ADC, ABD. Chứng minh

1. O_1, O_2, B, C cùng thuộc một đường tròn.
2. O_2, O_3, C, D cùng thuộc một đường tròn.
3. O_3, O_4, A, D cùng thuộc một đường tròn.
4. O_1, O_4, A, B cùng thuộc một đường tròn.
5. O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.

Bài 122. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự, đường thẳng d vuông góc AB tại C. Điểm M di động trên đường thẳng d, vẽ BD vuông góc AM tại D. BD cắt d tại N. AN và BM cắt nhau tại E.

a) Chứng minh $CM \cdot CN$ không đổi.

b) Chứng minh đường tròn đường kính MN đi qua hai điểm cố định.

c) Chứng minh đường tròn (AMN) đi qua hai điểm cố định.

d) Chứng minh tâm đường tròn (AMN) thuộc một đường thẳng cố định.

e) Chứng minh đường thẳng DE đi qua một điểm cố định.

f) Gọi P, Q là giao điểm của DE và đường tròn (AMN). Vẽ đường kính AF của đường tròn (AMN). DE cắt AF tại I.

   1) Tứ giác $BMFN$ là hình gì?
   2) Chứng minh $AF \perp DE$.
   3) Chứng minh $AP^2 = AQ^2 = AF \cdot AI$.
   4) Chứng minh P di động trên một đường cố định.

Bài 123. Cho đường tròn $(O; R)$, A là điểm trên đường tròn. Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). B điểm trên tia Ax $(B \neq A)$. C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $BC = BA$. OB cắt AC tại H và cắt (O) tại D, E (E nằm giữa O và B).

a) Chứng minh BC là tiếp tuyến của (O).

b) Gọi S là diện tích của tứ giác $OABC$. Chứng minh $AC + OB \geq 2\sqrt{2S}$.

c) Gọi S' là diện tích của tứ giác $ABCD$. Chứng minh $AC + BD > 2\sqrt{2S'}$.

d) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

e) Vẽ hình chữ nhật $OABF$. Tứ giác $OBFC$ là hình gì?

f) Cho A di động và $AB = R\sqrt{3}$.

   1) Chứng minh B thuộc một đường cố định.
   2) Chứng minh H thuộc một đường cố định.
   3) Tính diện tích tứ giác $OABC, ABCD$, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, độ dài AE theo R.

Bài 124. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (O) đường kính AH cắt AB và AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh ba điểm E, O, F thẳng hàng.

c) Các tiếp tuyến của (O) vẽ từ E và F cắt BC tại M và N. Chứng minh:

   1) $OM \parallel AB$, $ON \parallel AC$.
   2) M, N lần lượt là trung điểm của BH, HC.
   3) $\widehat{MON} = 90^\circ$.
   4) $P_{OMN} = \dfrac{1}{2} P_{ABC}$. ($P_{OMN}, P_{ABC}$ là chu vi tam giác MON và ABC)

Bài 125. Cho nửa đường tròn $(O; R)$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB, dựng các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Lấy một điểm M trên nửa đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại D, C. Tia AM, BM kéo dài cắt By, Ax lần lượt tại F và E.

a) Chứng minh: các điểm D, M, O, A cùng nằm trên một đường tròn, các điểm C, M, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $\triangle COD$ vuông.

c) Chứng minh: D là trung điểm của AE.

d) Chứng minh: $\triangle CBO \sim \triangle BAE$.

e) Chứng minh: $AD \cdot BC = R^2$; $AD + BC = CD$.

f) Dựng MH vuông góc với AB. Chứng minh: AC và BD đi qua trung điểm I của MH.

g) Chứng minh: $EO \perp AC$.

h) Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MHO lớn nhất.

i) Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MAB lớn nhất.

j) Tìm vị trí điểm M để chu vi tam giác MAB lớn nhất.

k) Tìm vị trí điểm M để diện tích tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

l) Tìm vị trí điểm M để chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

Bài 126. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNK ($MN < MP$) đến (O). Gọi K là trung điểm của NP.

a) Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng tia KM là phân giác góc AKB.

c) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh rằng $AQ \parallel NP$.

d) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh rằng $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP$.

e) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.

f) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng $AB^2 = 4 \cdot HE \cdot HF$ (F là giao điểm của AB và NP).

g) Chứng minh rằng $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đí chứng tỏ rằng $OK \cdot OE$ không đổi. Từ đó suy ra EN, EP là các tiếp tuyến của (O).

h) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O).
Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

i) Chứng minh rằng KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc KAB. Từ đó suy ra $AE \cdot BF = AF \cdot BE$.

j) Tìm vị trí của các tuyến MNP để diện tích tam giác MNP đạt giá trị nhỏ nhất.

k) Chứng minh khi các tuyến MNP quay quanh M thì trong tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên đường tròn cố định và cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của NP, chứng minh đường AB đi qua 1 điểm cố định.

l) Giả sử $OM = 2R$. tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

Bài 127. Cho đường tròn (O) có dây BC. Trên cung lớn BC lấy điểm A bất kỳ (A khác B,C). Kẻ BE vuông góc với AC tại E; CF vuông góc với AB tại F, chúng cắt nhau tại H, P là trung điểm của BC.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $HB \cdot HE = HC \cdot HF$.

c) Đường thẳng EF và BC cắt nhau tại I,K và là giao điểm thứ hai của AI và (O). Chứng minh: $IK \cdot IA = IE \cdot IF$.

d) Tia AH cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Tam giác BMH là tam giác gì?

e) Kẻ đường kính AQ của (O). Tìm tâm đối xứng của tứ giác $BHCQ$.

f) Chứng minh độ dài AH không đổi khi A di động và dây BC cố định trên (O).

g) Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm A,K,F,H,E.

h) Chứng minh 4 điểm K,H,P,Q thẳng hàng.

i) Chứng minh FE vuông góc với OA.

j) Gọi S,N lần lượt là giao điểm của BE, CF với (O). Đường thẳng FE cắt (O) theo thứ tự tại L và U (L nằm giữa I và U). So sánh hai cung SL và cung NU.

k) Gọi d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với FE. Chứng minh: Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

l) So sánh các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHC và BCM. Từ đó chứng minh bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HAC, HBC bằng nhau.

Bài 128. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ cát tuyến AMN không đi qua O (M nằm giữa A và N). Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với $(O;R)$ (B và C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Đường thẳng BC cắt MN và AO lần lượt tại E và F. Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng 5 điểm A, B, O, I và C cùng thuộc một đường tròn và IA là đường phân giác của $\widehat{BIC}$.

b) Chứng minh $AC^2 = AM \cdot AN = AF \cdot AO$.

c) Chứng minh $MFON$ là tứ giác nội tiếp.

d) Chứng minh FC là đường phân giác của $\widehat{MFN}$ và $AM \cdot EN = AN \cdot EM$.

e) Chứng minh $EB \cdot EC = EM \cdot EN$.

f) Chứng minh $CM \cdot BN = CN \cdot BM$.

g) Hai đường thẳng OI và BC cắt nhau tại K. Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

h) Tia MF cắt $(O;R)$ tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng $BC \parallel DN$.

i) Kẻ đường kính BH của đường tròn (O). Các đường thẳng HM, HN cắt đường thẳng AO lần lượt tại P và Q. Chứng minh $OP = OQ$.

j) Giả sử $OA = 2R$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Bài 129. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a một khoảng 3 cm, vẽ đường tròn $(O; 3\text{ cm})$, gọi điểm H là hình chiếu của điểm O lên đường thẳng a (?3 SGK Trang 109 - Toán 9 - Tập 1)

a) Đường thẳng a có vị trí như thế nào đối với đường tròn (O)? Vì sao?

b) Gọi B và C là giao điểm của đường thẳng a với đường tròn (O). Tính BC.

c) Kẻ đường kính CD. Giải tam giác BCD.

d) Lấy E là trung điểm của dây BD. Hỏi tứ giác $OEBH$ là hình gì? Vì sao?

e) Đường thẳng DH cắt (O) tại F. Chứng minh: $\widehat{OCF} = \dfrac{\widehat{FOD}}{2}$.

f) Kẻ tiếp tuyến của (O) tại tiếp điểm C, cắt OH tại G. Chứng minh rằng GB là tiếp tuyến của (O).

g) Chứng minh: OG là đường trung trực của BC.

h) DG cắt (O) tại I, cắt BC tại K, cắt EO tại M. Chứng minh $EM \cdot GH = BE \cdot HK$.

i) Giải tam giác COG (độ dài cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2, góc làm tròn đến độ).

j) Chứng minh: $BG^2 = GI \cdot DG$.

k) Kẻ đường kính BN. Tiếp tuyến của (O) tại tiếp điểm N cắt CG tại P. Chứng minh: $PG = NP + BG$.

l) Chứng minh 3 điểm E, O, P thẳng hàng.

m) Chứng minh: $NP \cdot CG = DO \cdot NO$.

n) Gọi Q là giao điểm của NC và OP. Giải tam giác OCP (độ dài cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2, góc làm tròn đến độ).

o) Gọi T là giao điểm của BG và EO. Chứng minh TD là tiếp tuyến của (O).

p) Chứng minh: $TG = GC + TD$.

q) Gọi U là giao điểm của TD và PN. Chứng minh: $UO \perp DN$.

r) Tia GO cắt (O) tại hai điểm S và R $(GS < GR)$. Chứng minh S là tâm đường nội tiếp $\triangle GBC$.

s) Chứng minh rằng: R là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle GBC$.

t) Chứng minh $HI \perp IB$.

u) Chứng minh HB là tia phân giác của $\widehat{DHI}$.

Bài 130. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , AD là đường kính của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt tia BC ở M. Đường thẳng MO cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh $MD^2 = MB \cdot MC$.

b) Gọi H là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác $MDHO$ là tứ giác nội tiếp.

c) Qua B vẽ đường thẳng song song với MO, đường thẳng này cắt AD tại P. Chứng minh P thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHD$.

d) Chứng minh O là trung điểm của EF.

e) Các đường cao AQ, BN, CK của $\triangle ABC$ cắt (O) lần lượt tại L, T, G. Gọi I là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh hệ thức $\dfrac{AL}{AQ} + \dfrac{BT}{BN} + \dfrac{CG}{CK} = 4$.

f) Chứng minh ba điểm I, H, D thẳng hàng.

g) Chứng minh tứ giác $BDCT$ là hình thang cân.

h) Tính AI biết $BC = 8$ cm, $OC = 5$ cm.

i) Chứng minh tứ giác $BKNC$ nội tiếp và xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKNC$.

j) Chứng minh $\tan \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{KC}{KB + BC}$.

Bài 131. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A,B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại I, H.

a) Chứng minh rằng: M, A, O, E, B nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: ME là tia phân giác của góc $\widehat{AEB}$.

c) Chứng minh rằng: $MA^2 = MC \cdot MD$.

d) Chứng minh rằng: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$.

e) Chứng minh rằng: I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

f) Chứng minh rằng: Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

g) Chứng minh rằng: AB chứa đường phân giác góc $\widehat{CHD}$.

h) Chứng minh rằng: $\widehat{CAD} = \widehat{BHD}$.

i) OE kéo dài cắt AB tại K. Chứng minh rằng KC, KD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

j) AE cắt (O) tại giao điểm thứ hai là F, $F \neq A$. Chứng minh rằng: $BF \parallel CD$.

k) CH cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P, $P \neq C$. Chứng minh rằng: $DP \parallel AB$.

l) Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Chứng minh rằng: $CN \perp OB$.

Bài 132. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B (O, O' nằm khác phía đối với AB). Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại C, cắt (O') tại D sao cho A nằm giữa C và D.

a) Chứng minh OO' là trung trực của AB.

b) Chứng minh $\triangle BCD$ đồng dạng với $\triangle AOO'$.

c) Chứng minh số đo góc CBD không đổi.

d) Chứng minh $\dfrac{P_{BCD}}{P_{AOO'}} = \dfrac{BC}{OA}$.

e) Xác định vị trí của cát tuyến CD để

1) Chu vi tam giác BCD lớn nhất.
2) Diện tích tam giác BCD lớn nhất.
3) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD lớn nhất.

f) Cho $CD \perp AB$, CB cắt (O') tại B và E; DB cắt (O) tại B và F. Chứng minh:

1) B, O, C thẳng hàng; B, O', D thẳng hàng.
2) $\widehat{BCF} = \widehat{BDE}$.
3) AB là tia phân giác của góc EAF.

Bài 133. Cho tam giác $IBC, (IB = IC)$ nội tiếp đường tròn tâm $(O; R)$. Vẽ đường kính ID. Lấy A là điểm chạy trên cung nhỏ IC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AC = AE$.

a) Chứng minh AD là phân giác của góc BAC.

b) Chứng minh $AD \parallel EC$.

c) Chứng minh $AI \perp EC$.

d) Chứng minh $\widehat{ICE} = \widehat{IEC}$.

e) Chứng minh rằng khi A di động trên cung IC thì E di động trên một cung tròn cố định, giới hạn.

f) Xác định vị trí điểm A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Bài 134. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$, đường cao AH, phân giác AD cắt đường tròn ở E. Vẽ đường kính AF. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh $OE \perp BC$.

b) Chứng minh $\triangle HAB \backsim \triangle CAF$.

c) Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$.

d) Chứng minh $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = 2R$.

e) Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

f) Chứng minh $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

g) Chứng minh $AB \cdot AC - DB \cdot DC = AD^2$.

h) Cho BC cố định, A di động.

1) Xác định vị trí điểm A để $AB \cdot AC$ lớn nhất.
2) Xác định vị trí điểm A để $AB \cdot AC - DB \cdot DC$ lớn nhất.
3) Chứng minh I thuộc một đường tròn cố định, xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

i) Cho A cố định, BC di động thỏa mãn $AB \cdot AC = 3R^2$.

1) Chứng minh BC tiếp xúc với một đường tròn cố định.
2) Xác định vị trí BC để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 135. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là điểm chuyển động trên cung BC. Trên đoạn thẳng MA lấy D sao cho $MD = MB$. Vẽ đường kính AE cắt BC tại H, MA cắt BC tại I.

a) Chứng minh $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$. item Tính độ dài AB, EB theo R.

b) Chứng minh tam giác MBD đều.

c) Chứng minh $MA = MB + MC$.

d) Chứng minh $AI \cdot AM = AB^2$.

e) Chứng minh $IB \cdot IC = IA \cdot IM$.

f) Chứng minh $MI \cdot MA = MB \cdot MC$.

g) Chứng minh $\dfrac{1}{MI} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$.

h) Xác định vị trí của M để:

1. $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.
2. $\dfrac{4}{3}AI + AM$ đạt giá trị nhỏ nhất.
3. $IA \cdot IM$ đạt giá trị lớn nhất.
4. $\dfrac{1}{MI} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
6. $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} + \dfrac{1}{MI}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. $\dfrac{20}{MA} + \dfrac{11}{MI} + 2001 \cdot \left(\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 136. Cho tứ giác $ABCD$ có các đỉnh nằm trên đường tròn $(O;R)$ có hai đường chéo AC, BD vuôgn góc nhau tại I $(I \neq O)$.

a) Chứng minh $IA \cdot IC = IB \cdot ID$.

b) Vẽ đường kính CE. Chứng minh A, B, D, E là bốn đỉnh của một hình thang cân, $AB^2 + CD^2 = 4R^2$, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$.

c) Từ A và B vẽ các đường vuông góc đến CD lần lượt cắt BD tại F cắt AC tại K. Chứng minh rằng A, B, F, K là bốn đỉnh của một tứ giác đặc biệt.

d) Gọi M là trung điểm của CD. Chứng minh $AB = 2OM$.

e) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm I cố định. A, B, C, D di chuyển gọi P là trung điểm OI, H là chân đường cao vẽ từ I của tam giác ICD.

1. Chứng minh $MO^2 + MI^2 - 2MP^2 = \dfrac{OI^2}{2}$.
2. Chứng minh M, H thuộc một đường tròn cố định.
3. Gọi L, J lần lượt là hình chiếu của O trên AC, BD. Xác định vị trí của AC, BD để:
   i. Tam giác ILJ có diện tích lớn nhất, có chu vi lớn nhất.
   ii. Tổng $AC + BD$ lớn nhất, nhỏ nhất.

iii. Tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.

iv. Tam giác ICD có diện tích lớn nhất.

Bài 137. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm M di động trên nửa đường tròn này, vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N.

1) Chứng minh

   a) $AC + BD = CD$.

   b) $\widehat{COD} = 90^\circ$.

   c) $AC \cdot BD = R^2$.

   d) $MN \parallel AC$.

   e) $CD \cdot MN = CM \cdot DB$

   f) Đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

2) Xác định vị trí M để:

   a) $AC + BD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

   b) Diện tích tứ giác $ABDC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) MA cắt OC tại E, MB cắt OD tại F. Chứng minh trung điểm I của EF thuộc một đường tròn cố định.

4) MN cắt AB tại J. Chứng minh $MN = NJ$.

5) Tính MB, AC, BD, CD theo R, biết rằng $AM = R$.